UFG

XXIII Semana do IME

Universidade Federal de Goiás

Goiânia, 07 a 10 de outubro

Mini Curso

Classificação dos Pontos Singulares no Plano

Prof. Ms. Alysson Tobias Ribeiro da Cunha (UFG/Jataí)
Prof. Ms. Marcos Leandro Mendes Carvalho (UFG/Jataí)

CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS SINGULARES NO PLANO

CARVALHO,M.L.M., CUNHA, A.T.R.

1. Introdução

As Equações Diferenciais Ordinárias têm sido objeto de estudo em diversas áreas do conhecimento, entre elas a física, com a lei de resfriamento de Newton, e a Lei de Torricelli. Na Biologia temos como aplicação o crescimento populacional e eliminação de drogas. Na Química temos o decaimento radioativo. Na matemática financeira temos os Juros compostos.

Para tal estudo faz-se necessário o conhecimento sistemas de equações diferenciais ordinárias, em particular os pontos singulares destes sistemas, base fundamental para o estudo de campos vetoriais não-lineares.

Neste trabalho classificaremos os pontos singulares no Plano de sistemas de Equações Diferenciais Lineares, para tal, faz-se necessário o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral de uma Variável e Álgebra Linear[1].

2. Definições e Notações

A seguir estabeleceremos algumas notações. Ao longo do texto $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ denotará a derivada de $x \in \mathbf{R}^n$, em relação ao tempo t. Os vetores de $\mathbf{R}^n$ serão escritos na forma de matriz coluna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Assim temos

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix},$$

e o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad \cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

[1]Trabalho financiado pelo PROAPI/CAJ/UFG

pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

ou ainda

$$\dot{x} = Ax,$$

onde $x \in \mathbf{R}^n$ e A é a matrix $n \times n$ acima. Suponha que A é uma matriz diagonal, isto é $A = (a_{ij})_{n\times n}$ onde $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Então por notação

$$A = \text{diag}[a_{11}, ..., a_{nn}].$$

Definição 2.1. *Chamamos de retrato de fase do sistema anterior ao conjunto de todas as suas soluções em* $\mathbf{R}^n$.

Exemplo 2.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 \\ \dot{x_2} = -x_2 \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma

$$\dot{x} = Ax,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Note que $A = \text{diag}[1, -1]$. *Assim o sistema anterior é um sistema não-acoplado. A solução geral deste sistema é dado por* $x_1(t) = c_1 e^t$ *e* $x_2(t) = c_2 e^{-t}$. *Podemos escrever também como*

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} c,$$

onde $c = x(0) = (x_1(0), x_2(0))$.

O retratos de fase do deste sistema encontram-se representado na Figura 1.

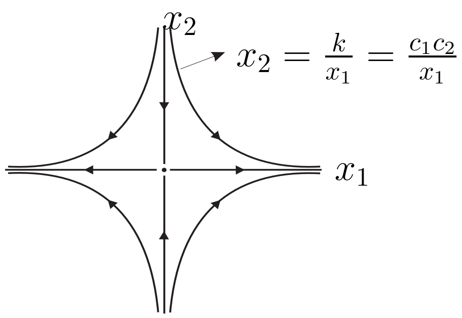

Figura 1. Retrato de Fase no Plano.

Exemplo 2.2. *Um exemplo de sistema linear no espaço é dado por*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 \\ \dot{x_2} = -2x_2 \\ \dot{x_3} = x_3 \end{cases}$$

Sua solução é dada por $x_1(t) = c_1e^t, x_2(t) = c_2e^{-2t}$ *e* $x_3(t) = c_3e^t$. *Note que esta solução pode ser escrita na forma*

$$x = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} c,$$

onde $c = x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))$. *Na Figura* **??** *construímos o retrato de fase do sistema acima*

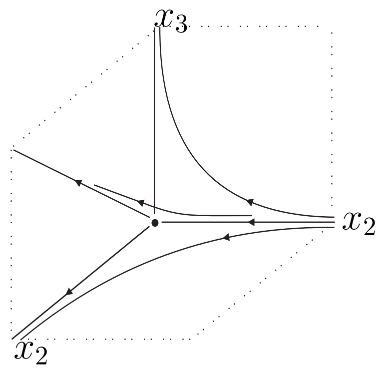

FIGURA 2. Retrato de Fase no Espaço.

Exercício 2.1. *Encontre a solução geral para os seguintes sistemas e descreva os seus retratos de fase.*

a) $\begin{cases} \dot{x_1} = -3x_1 \\ \dot{x_2} = x_2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x_1} = 4x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 \\ \dot{x_2} = x_2 \\ \dot{x_3} = x_3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dot{x_1} = -\pi x_1 \\ \dot{x_2} = -x_2 \\ \dot{x_3} = x_3 \end{cases}$

Sugestão para o item b): derive uma das equações e transforme o sistema numa equação diferencial linear de segunda ordem, daí resolva pelo método do fator integrante (Veja 2)

Exercício 2.2. *Determine a solução geral para o sistema linear*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \alpha x_1 \\ \dot{x_2} = x_2. \end{cases}$$

Esboce seu retrato de fase para $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ *e* $\alpha = 0$. *Note que quando* $\alpha > 0$ *o sistema tem uma certa estrutura qualitativa e quando* $\alpha < 0$ *tem outra estrutura diferente, dessa forma* $\alpha = 0$, *representa o "divisor de águas"entre dois comportamentos do sistema.*

Exercício 2.3. *Encontre a solução geral do sistema*

$$\dot{x} = Ax,$$

onde $A = diag[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$. *Quais são as condições sobre os autovalores* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *para que* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$*, para toda solução do sistema?*

3. Diagonalização da Matriz A

Utilizando técnicas de diagonalização da matriz A podemos transformar o sistema linear acoplado

$$\dot{x} = Ax,$$

noutro sistema linear não-acoplado.

Teorema 3.1. *Suponha que a matriz* $n \times n$ A *tenha os autovalores reais e distintos* $\lambda_1, ..., \lambda_n$. *Então qualquer conjunto de autovetores correspondentes* $\{v_1, ..., v_n\}$ *forma uma base para* $\mathbf{R}^n$, *a matriz* $P = [v_1, ..., v_n]$ *é invertível e*

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n].$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada por exemplo em [6] ou [7]. A seguir, vamos reduzir o sistema (1) para um sistema não-acoplado, utilizando o último teorema. Seja P, a matriz do teorema e considere a mudança de coordenadas

$$y = P^{-1}x.$$

Logo

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy.$$

Daí pelo teorema anterior temos

$$\dot{y} = \mathrm{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n]y.$$

Este sistema tem a solução

$$y(t) = \mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]y(0).$$

Como $y(0) = P^{-1}x(0)$, temos

$$x(t) = P\mathrm{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n]P^{-1}x(0).$$

Exemplo 3.1. *A seguir, resolveremos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2, \end{cases}$$

diagonalizando a matriz A. *Neste caso temos*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo que $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = -1$ *são os autovalores e* $v_1 = (0,1)$, $v_2 = (1, -\frac{1}{2})$, *os correspondentes autovetores. Assim*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos ainda

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2].$$

Portanto, fazendo a mudança de coordenadas $y = P^{-1}x$ *temos*

$$\dot{y} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2]y, \quad \therefore \quad y(t) = \mathrm{diag}[e^t, e^{-t}]y(0).$$

Pondo $x(0) = (c_1, c_2)$ *obtemos*

$$x(t) = P\text{diag}[e^t, e^{-t}]P^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^t - \frac{e^{-t}}{2} & e^t \end{bmatrix} x(0).$$

Isto é

$$x_1(t) = c_1 e^{-t} \text{ e } x_2(t) = (c_1 + c_2)e^t - \frac{c_1}{2}e^{-t}.$$

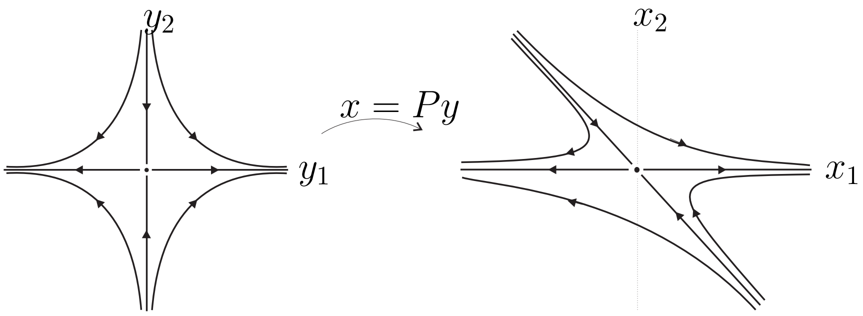

FIGURA 3. Retrato de Fase pela mudança de coordenadas.

Definição 3.1. *Seja* A *uma matriz* $n \times n$ *com* k *distintos autovalores negativos* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *e* $n - k$ *distintos autovalores positivos* $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n$. *Se* $\{v_1, ..., v_n\}$ *são os correspondentes autovetores, então os subespaços*

$$E^s = \text{Span}\{v_1, ..., v_n\}$$
$$E^u = \text{Span}\{v_{k+1}, ..., v_n\},$$

são chamados subespaços estável e instável, respectivamente.

Exercício 3.1. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

e faça seu retrato de fase nos sistemas x *e* $y = P^{-1}x$, *onde* P *é a matriz dada pelo teorema anterior e*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 3.2. *Seja* A *uma matriz* $n \times n$, *com autovalores reais e distintos. Encontre condições necessárias, e suficientes, para que* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, *onde* $x(t)$ *é solução de* $\dot{x} = Ax$.

4. Exponencial de Operadores

Seja $L(\mathbf{R}^n)$ o espaço de todos os operadores lineares $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Definição 4.1. *Seja* $T \in L(\mathbf{R}^n)$, *então a norma de* T *é definida por*

$$\|T\| = \max_{|x|\leq 1}|T(x)|.$$

Aqui estamos denotando $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, se $x \in \mathbf{R}^n$.

Exemplo 4.1. *Sejam* $T, S \in \mathbf{R}^n$ *então*

a) $\|T\| \geq 0$ *e* $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$.
b) $\|kT\| = |k|\|T\|, \forall\ k \in \mathbf{R}$.

c) $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$.

Definição 4.2. *Dizemos que a seqüência de operadores* $T_k \in L(\mathbf{R}^n)$ *converge para um operador* $T \in L(\mathbf{R}^n)$*, com* $k \to \infty$*, se*

$$\lim_{k\to\infty} \|T_k - T\| = 0.$$

Escreveremos $\lim_{k\to\infty} T_k = T$.

Proposição 4.1. *Sejam* $T, S \in L(\mathbf{R}^n$ *e* $x \in \mathbf{R}^n$*, então*

a) $|Tx| \leq \|T\||x|$.
b) $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.
c) $\|T^k\| \leq \|T\|^k$, $\forall\ k = 0, 1, 2, ...$

Prova: a) A desigualdade é verdadeira se $x = 0$. Se $x \neq 0$, defina $u = x/|x|$. Então pela definição de $\|T\|$, obtemos

$$\|T\| \geq |Tu| = \frac{|Tx|}{|x|} \Rightarrow |Tx| \leq \|T\||x|.$$

b) Seja $|x| \leq 1$, então da parte a) temos

$$|T(Sx)| \leq \|T\||Sx| \leq \|T\|\|S\||x| \leq \|T\|\|S\|.$$

Logo

$$\|TS\| = \max_{|x|\leq 1}|TS(x)| \leq \|T\|\|S\|.$$

∎

Um resultato fundamental para a definição de exponencial de um operador é dado pela

Teorema 4.1. *(Teste M de Weierstrass) Seja* f_k *uma sequência de funções reais com o mesmo domínio* D*, tal que* $|f_k(t)| \leq M_k$*, para todo* $t \in D$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ *é uma série numérica convergente. Então* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$*, converge absoluta e uniformemente em* D.

Para a demonstração deste teorema veja [5].

Proposição 4.2. *Sejam* $T \in L(\mathbf{R}^n)$ *e* $t_0 > 0$*, então a série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

converge absolutamente e uniformemente para $|t| \leq t_0$.

Prova: Pelo item c) da proposição anterior temos para $|t| \leq t_0$

$$\left\|\frac{T^k t^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{\|T\|^k t_0^k}{k!}.$$

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T\|^k t_0^k}{k!} = e^{\|T\| t_0},$$

temos pelo teste M de Weierstrass que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!},$$

converge absolutamente e uniformemente em $|t| \leq t_0$ ∎

Com base na proposição anterior temos o seguinte resultado

Definição 4.3. *Seja $T \in L(\mathbf{R}^n)$, então*

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$$

Note que $e^T \in L(\mathbf{R}^n)$ e $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$. Considere o sistema (**??**), então pondo $Tx = Ax$, a transformação $T \in L(\mathbf{R}^n)$ é dada por uma matriz $n \times n$ com respeito à base canônica de $\mathbf{R}^n$ (reciprocamente, todo elemento de $L(\mathbf{R}^n)$ é representado por uma matriz $n \times n$, veja [7]). Assim podemos definir e^{At}

Definição 4.4. *Seja A uma matriz $n \times n$, então*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \ \forall\ t \in \mathbf{R}$$

Exercício 4.1. *Mostre que $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\||t|}$, para todo $t \in \mathbf{R}$.*

Exercício 4.2. *Seja $T \in L(\mathbf{R}^n)$ tal que $\|T\| < 1$. Então $(I - T)$ é inversível e*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \qquad (\textit{série de Neumann}).$$

Além disso

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq (I - \|T\|)^{-1}.$$

Exercício 4.3. *Calcule, por definição, e^A onde $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.*

Proposição 4.3. *Se P e T são transformações lineares em $\boldsymbol{R}^n$ e $S = PTP^{-1}$, então $e^S = Pe^T P^{-1}$.*

Prova: De fato, segue diretamente da definição de e^S que

$$e^S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = P \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!} P^{-1} = Pe^T P^{-1}.$$

∎

Corolário 4.1. *Se $P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_j]$, então $e^{At} = P \operatorname{diag}[e^{\lambda_j t}] P^{-1}$.*

Prova: De fato, segue da Proposição 4.3 que $e^{P^{-1}AP} = Pe^A P^{-1}$. Por outro lado, $e^{\operatorname{diag}[\lambda_j t]} = \operatorname{diag}[e^{\lambda_j t}]$, donde $e^{At} = P \operatorname{diag}[e^{\lambda_j t}] P^{-1}$.

∎

Exercício 4.4. *Dada uma transformação linear diagonalizável A, isto é, existe uma transformação linear inversível P tal que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_j]$. Mostre que*

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Exercício 4.5. *Mostre que se v é autovetor da transformação linear A relacionado com autovalor λ, então v também é autovetor de e^A relacionado com o autovalor e^λ.*

Proposição 4.4. *Se S e T são transformações lineares em $\mathbf{R}^n$ tais que $ST = TS$, então $e^{S+T} = e^S e^T$.*

Prova: A saber, temos por hipótese que $ST = TS$, donde

$$(S+T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!}.$$

Assim,

$$e^{S+T} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^S e^T.$$

Na penúltima igualdade usamos o fato de que o produto de duas séries absolutamente convergentes é absolutamente convergente.

∎

Exercício 4.6. *Encontre duas matrizes A e B tais que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.*

Se na Proposição 4.4 considerarmos $S = -T$, obtemos:

Corolário 4.2. *Se T é uma transformação linear em $\mathbf{R}^n$, então e^T é inversível e sua inversa é dada por $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.*

Corolário 4.3. *Se* $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, *então* $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}$.

Prova: Com efeito, se $\lambda = a \pm ib$ segue por indução que

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\lambda^k) & -\mathrm{Im}(\lambda^k) \\ \mathrm{Im}(\lambda^k) & \mathrm{Re}(\lambda^k) \end{bmatrix},$$

onde Re e Im denotam as partes real e imaginária do número complexo λ, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) & -\mathrm{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) \\ \mathrm{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) & \mathrm{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(e^\lambda) & -\mathrm{Im}(e^\lambda) \\ \mathrm{Im}(e^\lambda) & \mathrm{Re}(e^\lambda) \end{bmatrix} \\ &= e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

∎

Corolário 4.4. *Se* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, *então* $e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Prova: Inicialmente, observemos que $A = aI + B$, onde $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Observemos também que aI comuta com B. Logo, da Proposição 4.4,

$$e^A = e^{aI} e^B = e^a e^B.$$

Além disso, segue diretamente da definição da exponencial de um matriz que

$$e^B = I + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + ... = I + B,$$

pois, $B^2 = B^3 = ... = 0$.

∎

Como no caso real, vale a seguinte fórmula:

Teorema 4.2. ***(Fórmula Alternativa para*** e^A***)*** *Para qualquer transformação linear* A *em* $\mathbf{R}^n$*, vale que*

$$e^A = \lim_{k\to\infty}\left(I + \frac{A}{k}\right)^k. \tag{1}$$

Prova: Com efeito, observemos que

$$e^A - \left(I + \frac{A}{k}\right)^k = \sum_{0\leq j\leq k}\left(\frac{1}{j!} - \frac{C_k^j}{k^j}\right)A^j + \sum_{j>k}\frac{A^j}{j!},$$

observando que

$$\frac{1}{j!} \geq \frac{k(k-1)...(k-j+1)}{m.m...m}\frac{1}{j!}$$

temos que os coeficientes $\left(\frac{1}{j!} - \frac{C_k^j}{k^j}\right) \geq 0$. E para $\|A\| = a$, segue que

$$\left\|e^A - \left(I + \frac{A}{k}\right)^k\right\| \leq \sum_{0\leq j\leq k}\left(\frac{1}{j!} - \frac{C_k^j}{k^j}\right)a^j + \sum_{j>k}\frac{a^j}{j!} = e^a - \left(I + \frac{a}{k}\right)^k,$$

e como a expressão à direita tende a zero com $m \to \infty$, temos o desejado.

∎

Definição 4.5. *Duas transformações lineares* A *e* B *são ditas equivalentes se existe um transformação linear inversível* P *tal que* $A = PBP^{-1}$*.*

Exercício 4.7. *Mostre que a equivalência entre transformações lineares é uma relação de equivalência.*

Lembremos que dada uma matriz A de ordem 2, existe uma matriz inversível P de ordem 2 (cujas colunas são os autovetores generalizados de A) tal que a matriz

$$B = P^{-1}AP,$$

tem uma das seguintes formas

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ou } B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Segue da definição da exponencial de uma matriz e de suas propriedades que

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix},\ e^{Bt} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } e^{Bt} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos bt & -\operatorname{sen} bt \\ \operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix},$$

respectivamente. Logo, da Proposição 4.3

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

5. O Teorema Fundamental para Sistemas Lineares

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. E seja $x_0 \in \mathbf{R}^n$, e considere o problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. . \tag{2}$$

Nesta seção mostraremos que problemas como em (2), tem única solução e é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0. \tag{3}$$

Para tal, começaremos mostrando que, como no caso real, a derivada da função exponencial e^{At} é Ae^{At}.

Lema 5.1. *Seja A uma matriz quadrada, então*

$$\frac{d}{dx}e^{At} = Ae^{At}.$$

Prova: Sabemos que A comuta com sigo mesmo, então da Proposição 4.4 que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} e^{At}\frac{(e^{Ah} - I)}{h} \\ &= e^{At} \lim_{h \to 0} \lim_{k \to \infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + ... + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\ &= Ae^{At}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é possível dada a convergência uniforme de e^{At} para $|h| \leq 1$, daí a mudança dos limites.

∎

Teorema 5.1. ***(O Teorema Fundamental para Sistemas Lineares)*** *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então dado $x_0 \in \mathbf{R}^n$, o problema de valor inicial*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. , \tag{4}$$

tem uma única solução dada por

$$x(t) = e^{At}x_0. \tag{5}$$

Prova: Inicialmente, mostraremos que $x(t) = e^{At}x_0$ é solução do Sistema (4). De fato, $x(0) = x_0$ e, como no Lema 5.1

$$x'(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t),$$

para todo $t \in \mathbf{R}$. Portanto, $x(t) = e^{At}x_0$ é solução. Para mostrarmos a unicidade, defina

$$y(t) = e^{-At}x(t),$$

onde $x(t)$ é uma solução de (4). Segue do Lema 5.1 e que $x(t)$ é uma solução de (4) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\frac{d}{dt}x(t)\\ &= -Ae^{At}x(t) + Ae^{At}x(t)\\ &= 0,\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbf{R}$ e sabendo que e^{-At} e A comutam. Logo, $y(t)$ é constante, e como $y(0) = x_0$, temos que $y(t) = x_0$. Portanto, $x(t) = e^{At}y(t) = e^{At}x_0$, como queríamos demonstrar.

∎

Exemplo 5.1. *Resolva o problema de valor inicial*

(6)
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases},$$

onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução: Inicialmente, observemos que os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_1 = 4$ com autovetores associados $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$, respectivamente. Daí, temos que

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = P^{-1}AP,$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue da Corolário 4.1 e do *Teorema Fundamental para Sistema Lineares* que

$$x(t) = P\,\mathrm{diag}\left[e^{2t}, e^{4t}\right]P^{-1}x_0 = \frac{1}{2}(e^{2t} + e^{4t}, e^{4t} - e^{2t})^T.$$

∎

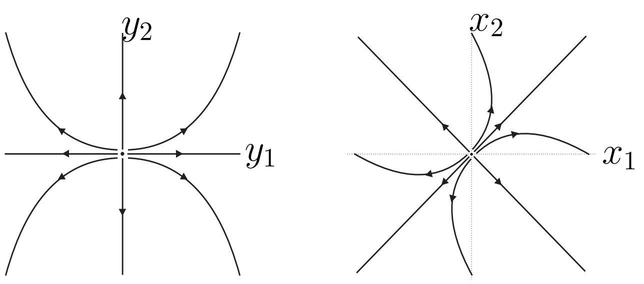

FIGURA 4. Retratos de fase dos campos vetoriais Y e X.

Exercício 5.1. *Seja A uma matriz de ordem n e denote por $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(R, \mathbf{R}^n)$ o espaço de todas as soluções da equação vetorial $\dot{x} = Ax$. Defina $T : \mathcal{S} \to \mathbf{R}^n$ por $T(x) = x(0)$ e, usando a linearidade da equação e o teorema fundamental para sistemas lineares, mostre que T é uma transformação linear, sobrejetora e injetora, respectivamente, ou seja, um isomorfismo linear. Conclua que* $\dim\mathcal{S} = n$.

Exercício 5.2. *Sejam A uma matriz quadrada, $v_1, v_2, ..., v_n$ uma base de $\mathbf{R}^n$ e $x_1, x_2, ..., x_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ as soluções de $\dot{x} = Ax$ tais que $x_i(0) = v_i$, $1 \le i \le n$. Mostre que $x_1, x_2, ..., x_n$ são linearmente independentes no espaço vetorial das funções e que qualquer solução de $\dot{x} = Ax$ é uma combinação linear de $x_1, x_2, ..., x_n$.*

6. Classificação dos pontos Singulares no Plano

Nesta seção discutiremos sobre os vários retratos de fase dos sistemas lineares da forma

$$\dot{x} = Ax, \tag{7}$$

onde A é uma matriz de ordem 2 e $x \in \mathbf{R}^n$. Para tal, descreveremos os retratos de fase dos sistemas lineares

$$\dot{y} = By, \tag{8}$$

onde $B = P^{-1}AP$ tem uma das formas dadas no final da seção anterior. Discutiremos os seguintes casos

Caso I: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, onde $\lambda < 0 < \mu$.

Neste caso, a origem é referida como uma sela. Se o Sistema 8 tiver condição inicial $y(0) = (l_1, l_2) \in \mathbf{R}^2$, este tem solução

$$y(t) = (l_1 e^{\lambda t}, l_2 e^{\mu t}).$$

Se $l_2 = 0$, solução tende ao infinito quando $t \to -\infty$ e a 0 quando $t \to \infty$. Se $l_1 = 0$ a solução tende a 0 quando $t \to -\infty$ e ao infinito quando $t \to \infty$. Se $l_1 l_2 \neq 0$ a solução tem um comportamento que combina o comportamento dos dois eixos em que uma coordenada tende ao infinito enquanto a outra tende a zero. Por exemplo, se $\lambda = -\mu$ temos que $x_1 x_2 = k$, de modo que a solução descreve uma hipérbole. O comportamento desses campos pode ser visto na Figura 5.

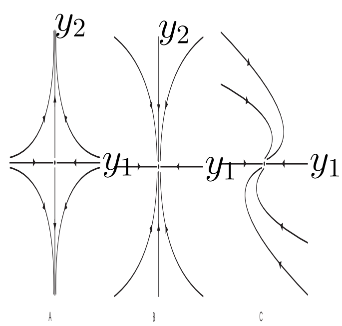

Figura 5. Sela na origem.

Caso II: $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, onde $\lambda \le \mu < 0$, ou $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, onde $\lambda < 0$.

Neste caso, a origem é dita nó. Se $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ a solução do Sistema 8 provida das condições iniciais $y_0 = (l_1, l_2)$, como no caso anterior, é

$$y(t) = (l_1 e^{\lambda t}, l_2 e^{\mu t}).$$

Com análise análoga ao caso acima, se $l_1 = 0$ as soluções tendem a zero quando $t \to +\infty$ e tendem ao infinito quando $t \to -\infty$, o comportamento é análogo se considerarmos $l_2 = 0$. Se $l_1 l_2 \neq 0$ as soluções também tendem a zero quando $t \to +\infty$ e tendem ao infinito quando $t \to -\infty$. Se $\lambda = \mu$ o retrato de fase é perfeitamente radial. Porém, se $\lambda < \mu$ as soluções satisfazem a equação $x_1 = k x_2^{\lambda/\mu}$ e $1 < \lambda/\mu$.

Por fim, se $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, onde $\lambda < 0$, o Sistema 8 provido das condições iniciais $y_0 = (l_1, l_2)$ tem solução

$$y(t) = (l_1 e^{\lambda t}, [t l_1 + l_2] e^{\lambda t})$$

e, via *Regra de L'hospital*, os limites quando $t \to \pm\infty$ são idênticos aos limites das soluções da primeira parte deste caso e as curvas soluções não triviais são assintoticamente tangentes à mesma invariante horizontal quando $t \to +\infty$. A discussão do caso caso $0 < \mu \leq \lambda$ é análoga e fica a cargo do leitor e os retratos de fase são ilustrados na Figura 7.

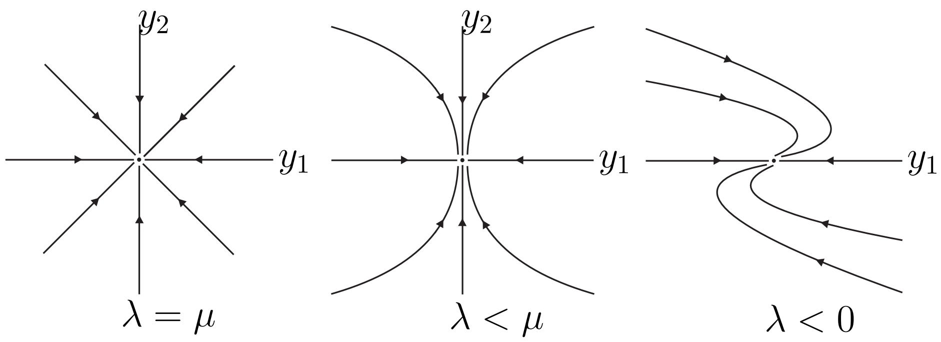

FIGURA 6. Nó estável na origem.

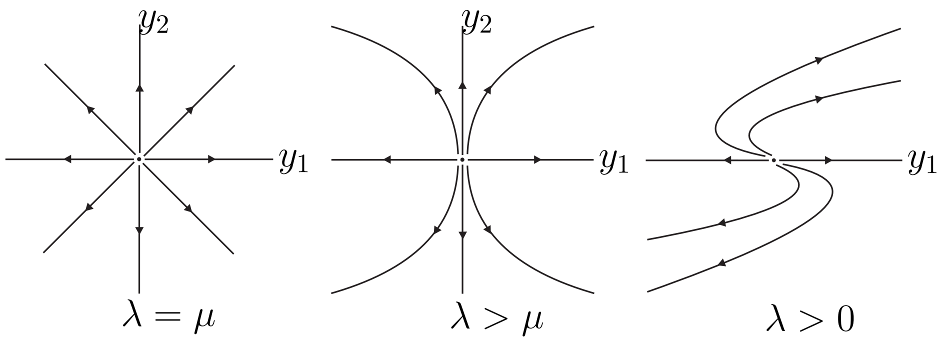

FIGURA 7. Nó instável na origem.

Para determinar os retratos de fase dos demais casos, discutiremos antes sobre coordenadas polares. Para tal, derivando implicitamente as equações $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ e $\theta = \mathrm{tg}^{-1} \frac{x_2}{x_1}$ com respeito a t, obtemos

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r} \text{ e } \dot{\theta} = \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2}, \tag{9}$$

para todo $r \neq 0$. Se considerarmos, em particular, o Sistema 8 onde $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, obtemos

$$\dot{r} = ar \text{ e } \dot{\theta} = b. \tag{10}$$

Este tem uma única solução se provido das condições iniciais

$$r(0) = r_0 \text{ e } \theta(0) = \theta_0. \tag{11}$$

Caso III: $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, onde $a < 0$.

Neste caso, B tem uma par de autovalores complexos com parte real não nula $\lambda = a \pm ib$ e a origem é dita *foco estável*. Pelas Equações Polares (10), as trajetórias se aproximam da origem a media que t aumenta, haja vista que r decresce (pois $\dot{r} = ar < 0$). Essas trajetórias se aproximam espiralando (pois $\dot{\theta} = b$), no sentido horário se $b < 0$ e no sentido anti-horário $b > 0$, como pode ser visto na Figura 8.

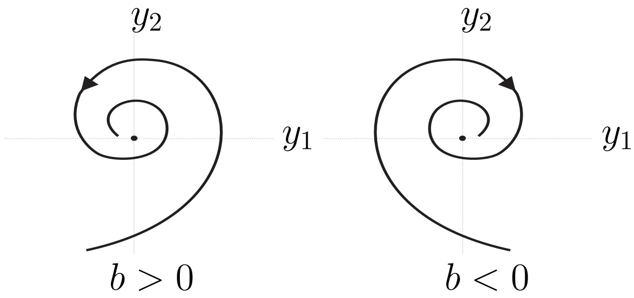

Figura 8. Foco Estável na origem.

Caso IV: $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, onde $a > 0$.

Neste caso, B tem uma par de autovalores complexos com parte real não nula $\lambda = a \pm ib$ e a origem é dita *foco instável*. Pelas Equações Polares (10), as trajetórias se afastam da origem a media que t aumenta, haja vista que r cresce (pois $\dot{r} = ar > 0$). Essas trajetórias se afastam espiralando (pois $\dot{\theta} = b$), no sentido horário se $b < 0$ e no sentido anti-horário $b > 0$, como pode ser visto na Figura 9.

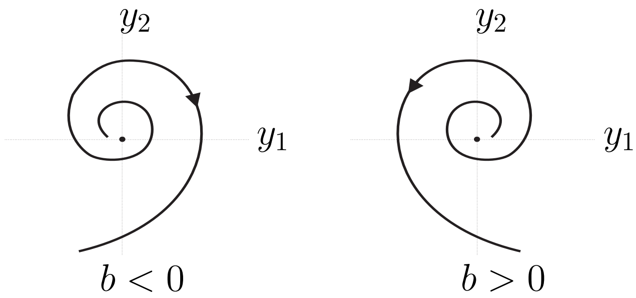

Figura 9. Foco Instável na origem.

Caso V: $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$.

Neste caso, B tem auto-valores complexos $\lambda = \pm ib$ e a origem é dita *centro*. Note que as trajetórias são todas periódicas, haja vista que $\dot{r} = 0$, rodando no sentido no sentido anti-horário se $b > 0$ e no sentido horário se $b < 0$, como pode ser visto no retrato de fase a seguir.

Definição 6.1. *O sistema linear 7 é dito ter uma sela na origem se a matriz A for equivalente a matriz B do Caso I, um nó se a matriz A for equivalente a matriz B do Caso II, um foco se a matriz A for equivalente a matriz B dos Casos III e IV. E é dito ser um centro se a matriz A for equivalente a matriz B do Casos V.*

Teorema 6.1. *Seja $\delta = \det A$ e $\tau = \mathrm{tr} A$ e considere o sistema linear*

$$\dot{x} = Ax. \tag{12}$$

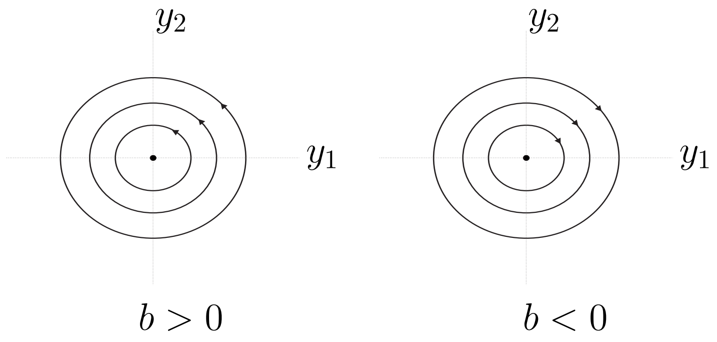

FIGURA 10. Centro na origem.

(1) *Se $\delta < 0$, então (12) tem uma sela na origem.*
(2) *Se $\delta > 0$ e $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, então (12) tem um nó na origem. Esse é estável se $\tau < 0$ e instável se $\tau > 0$.*
(3) *Se $\delta > 0$ e $\tau^2 - 4\delta < 0$, então (12) tem um foco na origem. Esse é estável se $\tau < 0$ e instável se $\tau > 0$.*
(4) *Se $\delta > 0$ e $\tau = 0$, então (12) tem um centro na origem.*

Prova: Notemos que os autovalores da matriz A são dados pela equação

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

implicando que $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$, donde

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}.$$

Assim,

(1) Se $\delta < 0$, segue que $\tau^2 - 4\delta > 0$ e portanto, a transformação linear A tem dois autovalores reais de sinais opostos;
(2) Se $\delta > 0$ e $\tau^2 - 4\delta < 0$, então a transformação linear A tem dois autovalores reais com o mesmo sinal de τ;
(3) Se $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ e $\tau \neq 0$, então a transformação linear A possui dois autovalores conjugados $\lambda = a \pm ib$ e A é equivalente a matriz B dos Casos III e IV, onde $a = \tau/2$;
(4) Se $\delta > 0$ e $\tau = 0$, então a transformação linear A possui dois autovalores complexos imaginários puros conjugados $\lambda = \pm ia$.

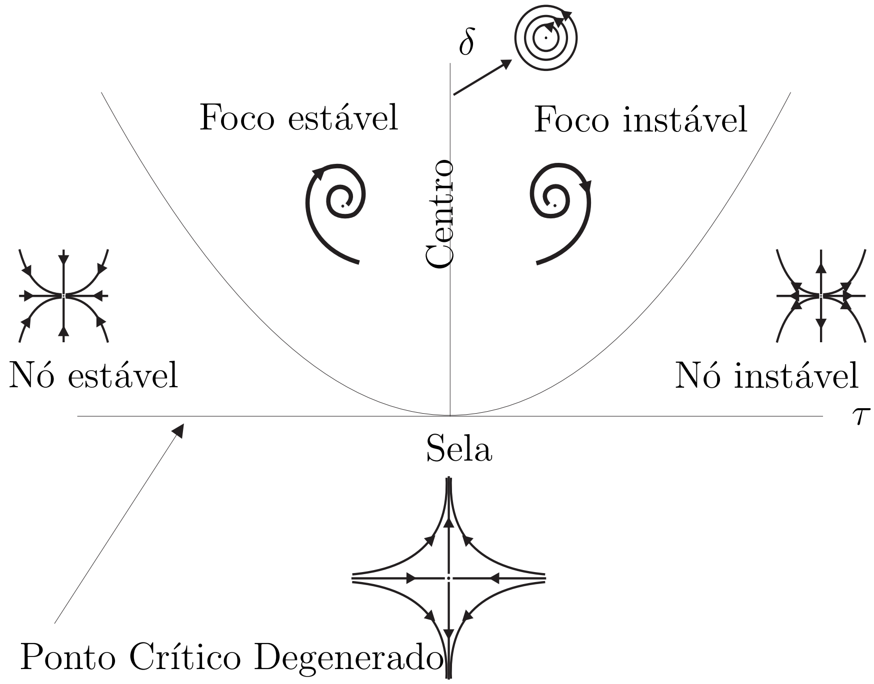

Figura 11. Diagrama de Classificação dos Pontos Críticos no Plano.

Referências

[1] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New york, 1991.

[2] Arnold, V.I.,*Equações Diferenciais Ordinárias*. Ed. Mir Moscovo,1985.

[3] Doering, C.I., Lopes, A.O., *Equações Diferenciais Ordinárias*.IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[4] Sotomayor J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[5] Ávila, G., *Introdução à Análise Matemática*. 2° Ed., Ed. Edgard Blucher, São Paulo, 1999.

[6] Lowental, F. *Linear Algebra with Linear Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1975.

[7] Lima, E.L., *Álgebra Linear*. 3ªEd, IMPA, Rio de Janeiro, 1998.

[8] Edwards, J. C. H., Penney, D.E. *Equações Diferenciais Elementares, com problemas de contorno*, 3ªEd, Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1995.

Alysson Tobias Ribeiro da Cunha
Marcos Leandro Mendes Carvalho.
UFG - Campus de Jataí
e-mail:alyxz_2@yahoo.com.br