UFG

XXIII Semana do IME

Universidade Federal de Goiás

Goiânia, 07 a 10 de outubro

Mini Curso

Teoria Local das Curvas Planas

Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues - UnB

.

Estas notas são dedicadas a todos aqueles (alunos, docentes, técnicos...) que tive o prazer de conviver durante os 10 anos que trabalhei no IME/UFG. E também à minha filha Bruna Ávila Rodrigues, minha fonte de vida.

TEORIA LOCAL DAS CURVAS PLANAS

RODRIGUES, L. M. D. DE A.

1. Introdução

Neste mini-curso, abordamos o estudo local da teoria das curvas planas. Escolhemos trabalhar com curvas planas pois muitos resultados podem ser apresentados de forma elementar. Elementar no sentido de que os pré-requisitos necessários para o entendimento do mini-curso são os cursos de Cálculo 1 e Geometria Analítica. Por teoria local, entendemos como sendo o estudo do comportamento da curva em uma vizinhança de um de seus pontos. Procuramos ilustrar os conceitos apresentados na teoria por meio de exemplos. Uma ótima referência para um estudo mais aprofundado deste assunto é o livro "Introdução às curvas planas" de Hilário e Walcy, ver [2].

Na seção 2 definimos uma curva parametrizada diferenciável do plano como sendo uma aplicação $\alpha : I \to R^2$ tal que $\forall t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ onde as funções $x, y : I \to R$ são funções diferenciáveis. Na seção 3 introduzimos o conceito de curva regular. Na seção 4 mostramos que uma curva α está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $|\alpha^{'}(t)| = 1, \forall t \in I$. Mostramos, também, que toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. Na seção 5 deduzimos as chamadas Fórmulas de Frenet. Consideramos curvas parametrizadas pelo comprimento de arco $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, onde s é chamado o parâmetro comprimento de arco. O vetor $t(s) = (x^{'}(s), y^{'}(s))$ é chamado vetor tangente à curva α em $\alpha(s)$. O vetor $n(s)$, tal que $\{t(s), n(s)\}$ forma uma base para R^2, é chamado o vetor normal à curva. A partir daí, definimos a curvatura da curva e as Fórmulas de Frenet. Observamos que o sinal da curvatura depende da orientação da curva e damos uma interpretação geométrica para a curvatura na seção 6. Além disso, na seção 7, exploramos o conceito de evoluta e involuta de uma curva e consideramos alguns exemplos. Terminamos, na seção 8, com o Teorema Fundamental das Curvas Planas, que mostra que a curvatura determina uma curva plana a menos de sua posição no plano.

Observamos que todo este estudo, feito para curvas planas, pode ser feito para curvas no espaço R^3. O leitor interessado neste assunto poderá consultar [7] e [5].

Gostaríamos de agradecer a comissão organizadora da XXIII Semana do IME que nos possibilitou lecionar este mini-curso. Aproveitando a ocasião, gostaria de deixar registrado, os meus sinceros agradecimentos a todo o corpo discente, corpo docente e técnicos administrativos do IME/UFG, pelo doce convívio durante os 10 anos que trabalhamos juntos neste Instituto. Foram anos de muita aprendizagem (tanto de matemática quanto de vida...) que ficarão para sempre na minha memória... A vocês meu forte abraço de agradecimento e de muitas saudades...

2. Curvas parametrizadas

Nesta seção vamos estudar localmente uma curva α no plano, isto é, fixado t_0, estudaremos como a curva $\alpha(t)$ se comporta para valores de t próximos de t_0.

Definição 2.1. *Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação* $\alpha : I \rightarrow R^2$ *tal que* $\forall t \in I$ *associa* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ *onde as funções* $x, y : I \rightarrow R$ *são funções diferenciáveis de classe* C^∞. *A variaável* $t \in I$ *é dita parâmetro da curva e o subconjunto de* R^2 *dos pontos* $\alpha(t), t \in I$ *é chamado o traço da curva.*

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.2. (Curva constante)
A aplicação $\alpha : R \rightarrow R^2$ dada por $\alpha(t) = (a, b)$ é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço se reduz ao ponto (a, b).

Exemplo 2.3. (Reta)
A aplicação $\alpha : R \rightarrow R^2$ dada por $\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$ onde $a^2 + b^2 \neq 0$ é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma linha reta passando pelo ponto (x_0, y_0) e paralela ao vetor de coordenadas (a, b).

Exemplo 2.4. (Circunferência)
A aplicação $\alpha : R \rightarrow R^2$ dada por $\alpha(t) = (\cos t, \text{ sen } t)$ é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1.

Exemplo 2.5. A aplicação $\alpha : R \rightarrow R^2$ dada por $\alpha(t) = (\cos t(2\cos t - 1), \text{ sen } t(2\cos t - 1))$ é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é um cardióide.

Exemplo 2.6. A aplicação $\alpha : R \rightarrow R^2$ dada por $\alpha(t) = (t, |t|)$ não é uma curva parametrizada diferenciável, já que $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$. Porém a restrição de α, a qualquer intervalo que não contém o ponto $t = 0$, é uma curva parametrizada diferenciável.

Duas curvas parametrizadas podem ter o mesmo traço.

Exemplo 2.7. *Considere* $\alpha(t) = (t, 2t), t \in R$ *e* $\beta(t) = (2r + 1, 4r + 2), r \in R$. *Estas curvas têm o mesmo traço que é uma reta passando pela origem na direção do vetor* $(1, 2)$.

3. Curva Regular

Para definirmos curva regular, precisamos definir o que é seu vetor tangente em cada ponto.

Definição 3.1. *Seja* $\alpha : I \subset R \rightarrow R^2$ *uma curva parametrizada diferenciável, que para cada* $t \in I$ *associa* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. *O vetor*

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$$

é chamado o vetor tangente a α *em* t.

A seguir vamos definir reta tangente.

Definição 3.2. *Seja* $\alpha : I \to R^2$ *uma curva regular. A reta tangente a* α *em* $t_0 \in I$ *é a reta que passa por* $\alpha(t_0)$ *na direção de* $\alpha^{'}(t_0)$*, isto é dada pela função* $g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha^{'}(t_0), r \in R$*.*

Exemplo 3.3. Considere $\alpha : R \to R^2$ dada por $\alpha(t) = (\cos t(2\cos t - 1), \text{sen}\, t(2\cos t - 1))$ uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente a α em t é igual a

$$\alpha^{'}(t) = (\text{ sen } t - 2 \text{ sen } 2t, 2\cos 2t - \cos t).$$

Para o desenvolvimento da teoria local das curvas é necessário que exista reta tangente à curva α para cada valor do parâmetro t. Para isto, é suficiente que o vetor tangente a α não seja nulo para todo t. Portanto restringiremos o nosso estudo apenas às curvas que satisfazem esta condição. Estas curvas são definidas a seguir.

Definição 3.4. *Uma curva parametrizada diferenciável* $\alpha : I \to R^2$ *é dita regular se* $\forall t \in I\ ,\ \alpha^{'}(t) \neq 0$*.*

As curvas dos exemplos citados anteriormente são exemplos de curvas regulares. Intuitivamente o traço de uma curva regular é suave, sem bicos, exceto por possíveis pontos de auto-interseção. Localmente, porém, α não tem auto-interseção.

Exemplo 3.5. Um exemplo interessante de uma curva parametrizada diferenciável regular, é dado por $\alpha : I \to R^2$ definida por $\alpha(t) = (t, f(t))$, onde $f : I \to R$ é uma função diferenciável. O traço de α é igual ao gráfico de f. Como $\alpha^{'}(t) = (1, f^{'}(t)) \neq (0,0), \forall t \in I$, α é uma curva regular. Pode-se mostrar que toda curva regular é dessa forma. Ver [2].

4. Reparametrização, Comprimento de arco

Vamos descrever a seguir, como obter várias curvas regulares tendo o mesmo traço.

Definição 4.1. *Sejam* I *e* J *intervalos abertos de* R*,* $\alpha : I \to R^2$ *uma curva regular e* $h : J \to I$ *uma função diferenciável* (C^∞)*, cuja derivada de primeira ordem é não nula em todos os pontos de* J *e tal que* $h(J) = I$*. Podemos então considerar uma nova curva* $\beta : J \to R^2$*, definida por*

$$\beta(t) = (\alpha o h)(t) = \alpha(h(t)).$$

A curva β *é uma curva regular, que tem o mesmo traço que* α*, chamada a reparametrização de* α *por* h*. A função* h *é dita mudança de parâmetro.*

Vamos considerar apenas reparametrizações onde a função mudança de parâmetro é estritamente crescente ou descrescente. Neste caso $h^{'}(t) \neq 0$ e, portanto se α é uma curva regular em I, sua reparametrização $\beta = \alpha o h$ também será curva regular em J.

Definição 4.2. *A orientação de uma curva regular plana* α *é o sentido de percurso do traço de* α*.*

Se h é estritamente crescente, dizemos que a reparametrização $\beta = \alpha o h$ é positiva, ou que preserva a orientação de α. No caso em que h é estritamente decrescente, a reparametrização é dita negativa, ou que reverte a orientação de α.

Exemplo 4.3. Consideremos a circunferência de raio a dada por

$$\alpha(t) = (a\cos t, asent), t \in [0, 2\pi].$$

Seja $h(s) = \dfrac{s}{a}, s \in [0, 2\pi]$. A reparametrização da curva α por h é a curva

$$\beta(s) = \alpha oh(s) = (a\cos\frac{s}{a}, asen\frac{s}{a}).$$

Neste caso as curvas α e β têm a mesma orientação.

Exemplo 4.4. A curva regular

$$\beta(r) = (-2r + 1, -4r + 2), r \in R,$$

é uma reparametrização da curva

$$\alpha(t) = (t, 2t), t \in R.$$

Basta considerar a mudança de parâmetro $h(r) = -2r + 1, r \in R$. Neste caso as curvas α e β têm orientação opostas.

A seguir vamos definir comprimento de arco para uma curva regular.

Definição 4.5. *Seja $\alpha : I \to R^2$ uma curva regular e fixemos t_0 e t_1 pontos do intervalo I. A aplicação*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha^{'}(t)|dt$$

é denominada a função comprimento de arco da curva α a partir de t_0.

Esta função é diferenciável de classe C^∞, pois α é uma curva regular.

Definição 4.6. *Uma curva regular $\alpha : I \to R^2$ é dita uma parametrização pelo comprimento de arco, se para cada $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é*

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha^{'}(t)|dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 4.7. *Uma curva $\alpha : I \to R^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se, $\forall t \in I, |\alpha^{'}(t)| = 1$.*

Demonstração: Suponhamos α parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos $t_0 \in I$. Consideremos a função $s : I \to R$ que para cada $t \in I$ associa $s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha^{'}(t)|dt$. Se $t_0 \leq t$ então por hipótese $\int_{t_0}^{t} |\alpha^{'}(t)|dt = t - t_0$; se $t \leq t_0$ então $-s(t) = \int_{t}^{t_0} |\alpha^{'}(t)|dt = t_0 - t$. Portanto, para todo $t \in I$, $s(t) = t - t_0$, donde $s^{'}(t) = 1$. Como $s^{'}(t) = |\alpha^{'}(t)|$, concluímos que $|\alpha^{'}(t)| = 1, \forall t \in I$. A recípropositionca é imediata. •

Exemplo 4.8. A aplicação

$$\alpha(t) = (a\cos t, asent), t \in R,$$

onde $a \neq 0$, é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, já que $|\alpha^{'}(t)| = 1, \forall t \in R$.

Vejamos que, mesmo que o intervalo de definição de uma curva tenha comprimento infinito, seu comprimento pode ser finito.

Exemplo 4.9. A espiral $\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\text{sen}t)$, definida em R é tal que

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)|dt = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

Em particular, $s(\alpha_{|[0,+\infty]}) = lim_{t\to\infty}s(t) = \sqrt{2}$, e $s(\alpha_{|[0,-\infty]})$ é infinito.

O próximo resultado mostra que toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Proposição 4.10. *Seja $\alpha : I \to R^2$ uma curva regular e $s : I \to s(I) \subset R$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0. Então existe a função inversa h de s, definida no intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha o h$ é uma reparametrização de α, onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração: Se α é uma curva regular, então

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0,$$

isto é, s é uma função estritamente crescente. Segue-se que existe a função inversa de s, $h : J \to I$. Como $\forall t \in I, h(s(t)) = t$, temos que $\dfrac{dh}{ds}\dfrac{ds}{dt} = 1$, portanto

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Concluímos que $\beta(s) = \alpha o h(s), s \in J$, é uma reparametrização de α e $|\dfrac{d\beta}{ds}| = |\dfrac{d\alpha}{dt}\dfrac{dh}{ds}| = |\dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}| = 1$. Portanto pela proposição 1, β está parametrizada pelo comprimento de arco. •

Definição 4.11. *A aplicação β da proposição acima é chamada uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.*

Observamos que esta parametrização não é única, pois depende da função comprimento de arco, que por sua vez depende de t_0 fixado.

Exemplo 4.12. Consideremos $\alpha(t) = (at + c, bt + d), t \in R$ e $a^2 + b^2 \neq 0$. Seja $s(t)$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 = 0$, isto é,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}dt = \sqrt{a^2 + b^2}t.$$

A função inversa se s é dada por $h(s) = \dfrac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, s \in R$. Portanto $\beta = \alpha o h$, que a cada s associa

$$\beta(s) = (a\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, b\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d),$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Exemplo 4.13. Consideremos a espiral logarítimica $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \text{sen} t), t \in R$. Temos que $|\alpha^{'}(t)| = \sqrt{2}e^t$ e portanto a função comprimento de arco de α, a partir de $t_0 = 0$, é $s(t) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}$. A função inversa é dada por $h(s) = \log(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)$. Portanto,

$$\beta(s) = ((\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)\cos(\log(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)), (\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)sen(\log(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)))$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

5. Fórmulas de Frenet

Vamos considerar nesta seção curvas $\alpha : I \rightarrow R^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco,

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)), s \in I.$$

Para cada $s \in I$, $\alpha^{'}(s)$ é um vetor unitário, que denotamos por $t(s)$, isto é,

$$t(s) = \alpha^{'}(s) = (x^{'}(s), y^{'}(s)).$$

Definição 5.1. *O vetor $t(s)$ é chamado o vetor tangente à curva α em $\alpha(s)$.*

Seja $n(s)$ um vetor unitário ortogonal a $t(s)$, tal que a base ortonormal de R^2 formada por $t(s)$ e $n(s)$ têm a mesma orientação que a base $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de R^2, isto é,

$$n(s) = (-y^{'}(s), x^{'}(s)).$$

Definição 5.2. *O conjunto de vetores $t(s)$ e $n(s)$ é chamado referencial de Frenet da curva α em s.*

Definição 5.3. *A reta normal a α em s_0 é a reta que passa por $\alpha(s_0)$ na direção de $n(s_0)$.*

Observamos que $t(s)$ e $n(s)$ são funções de I em R^2, diferenciáveis de classe C^∞ e para cada $s \in I$, os vetores de R^2, $t^{'}(s)$ e $n^{'}(s)$, podem ser escritos como combinação linear de $t(s)$ e $n(s)$. Como $t(s)$ é unitário, segue que $t^{'}(s)$ é ortogonal a $t(s)$ e portanto $t^{'}(s)$ é proporcional a $n(s)$.

Definição 5.4. *Este fator de proporcionalidade, denotado por $k(s)$, é chamado curvatura de α em s, isto é,*

$$t^{'}(s) = k(s)n(s).$$

Considerando a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s)), s \in I$, segue da definição que

$$k(s) = < t^{'}(s), n(s) > = < \alpha^{''}(s), n(s) >,$$

donde

$$k(s) = -x^{''}(s)y^{'}(s) + y^{''}(s)x^{'}(s).$$

Analogamente como $n(s)$ é unitário, segue que $n^{'}(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e portanto $n^{'}(s)$ é proporcional a $t(s)$. Como

$$< n^{'}(s), t(s) > = -x^{'}y^{''}(s) + x^{''}(s)y^{'}(s),$$

concluímos que

$$n^{'}(s) = -k(s)t(s).$$

Definição 5.5. *As equações*
$$t^{'}(s) = k(s)n(s),$$
$$n^{'}(s) = -k(s)t(s)$$
são chamadas as fórmulas de Frenet de uma curva plana.

A função $|k(s)| = |\alpha^{''}(s)|$ indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção.

De fato, fixemos $s_0 \in I$ e consideremos os vetores tangentes $\alpha^{'}(s_0)$ e $\alpha^{'}(s_0 + h)$, onde $s_0 + h \in I$. Seja $\phi(h)$ o ângulo formado por $\alpha^{'}(s_0)$ e $\alpha^{'}(s_0 + h)$, isto é, $0 \leq \phi(h) \leq \pi$, tal que
$$\cos \phi(h) = < \alpha^{'}(s_0), \alpha^{'}(s_0 + h) > .$$
Então $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\phi(h)}{h}$ indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção. Como para todo h
$$|\alpha^{'}(s_0 + h) - \alpha^{'}(s_0)| = 2sen\frac{\phi(h)}{2},$$
concluímos que
$$|k(s_0)| = |\alpha^{''}(s_0)| = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(h)}{h}.$$

Exemplo 5.6. Seja $\alpha(s)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é uma reta. Então a curvatura é identicamente nula.

De fato, seja
$$\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0), s \in I,$$
onde a e b são constantes e $a^2 + b^2 = 1$. Como $t(s) = \alpha^{'}(s)$ é constante, segue que $t^{'}(s) = 0$ e portanto $k(s) = 0, \forall s \in I$.

Exemplo 5.7. Consideremos a curva
$$\alpha(s) = (a + b\cos\frac{s}{b}, c + bsen\frac{s}{b}), s \in R, b > 0,$$
cujo traço é uma circunferência de centro (a, c) e raio b. Neste caso
$$t(s) = (-sen\frac{s}{b}, \cos\frac{s}{b}),$$
$$n(s) = (-\cos\frac{s}{b}, -sen\frac{s}{b}).$$
Segue que
$$k(s) = < t'(s), n(s) > = \frac{1}{b}.$$
Consideremos uma reparametrização de α, dada por
$$\beta(s) = (a + b\cos\frac{s}{b}, c - bsen\frac{s}{b}).$$
Então a curvatura será igual a $-\dfrac{1}{b}$.

Observamos que o sinal da curvatura depende da orientação da curva. Mais adiante veremos a interpretação geométrica do sinal da curvatura.

O próximo resultado expressa a curvatura de uma curva regular e não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco.

Proposição 5.8. *Seja $\alpha(r) = (x(r), y(r)), r \in I$, uma curva regular. Então:*

$$t(r) = \frac{(x^{'}, y^{'})}{\sqrt{(x^{'})^2 + (y^{'})^2}},$$

$$n(r) = \frac{(-y^{'}, x^{'})}{\sqrt{(x^{'})^2 + (y^{'})^2}},$$

$$k(r) = \frac{-x^{''}y^{'} + x^{'}y^{''}}{((x^{'})^2 + (y^{'})^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demonstração: Seja $\beta(s)$ uma reparametrização de α por comprimento de arco. Derivando $\beta(s(r)) = \alpha(r)$ temos

(1) $$\frac{d\beta}{ds}\frac{ds}{dr} = \alpha^{'}(r)$$

e

(2) $$\frac{d^2\beta}{ds^2}(\frac{ds}{dr})^2 + \frac{d\beta}{ds}\frac{d^2s}{dr^2} = \alpha^{''}(r)$$

daí

(3) $$\frac{ds}{dr} = |\alpha^{'}(r)|.$$

Portanto

(4) $$\frac{d^2s}{dr^2} = \frac{< \alpha^{'}(r), \alpha^{''}(r) >}{|\alpha^{'}(r)|}.$$

Considerando $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ segue de (1) e (3) que

$$t(r) = \frac{(x^{'}, y^{'})}{\sqrt{(x^{'})^2 + (y^{'})^2}}.$$

Pela definição de vetor normal temos

$$n(r) = \frac{(-y^{'}, x^{'})}{\sqrt{(x^{'})^2 + (y^{'})^2}}.$$

Como

$$k(s(r)) = < \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(r)), n(r) >$$

concluímos usando (1) a (4) que

$$k(r) = \frac{-x^{''}y^{'} + x^{'}y^{''}}{((x^{'})^2 + (y^{'})^2)^{\frac{3}{2}}}. \bullet$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 5.9. Consideremos a espiral logarítimica

$$\alpha(r) = (e^r \cos r, e^r senr), r \in R.$$

Então

$$\alpha(r)' = e^r(\cos r - senr, senr + \cos r),$$

$$\alpha(r)'' = e^r(-2senr, 2\cos r),$$

e portanto $k(r) = \dfrac{1}{\sqrt{2}e^r}$.

6. Interpretação geométrica do sinal da curvatura

A seguir veremos a interpretação geométrica do sinal da curvatura. Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Como o vetor tangente $t(s) = \alpha'(s)$ é unitário temos que $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$. Fixemos $s_0 \in I$ e suponhamos que $k(s_0) \neq 0$. Observamos que a reta tangente a α em s_0,

$$T(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0),$$

divide o plano em dois semiplanos.

Considerando a expansão de $\alpha(s)$ em séries de Taylor, em torno de s_0 temos

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\alpha''(s_0) + R(s),$$

onde $R(s)$ é uma função vetorial, tal que $\lim_{s \to s_0} \dfrac{R(s)}{(s - s_0)^2} = 0$. Portanto

$$\alpha(s) - T(s) = \frac{(s - s_0)^2}{2}\alpha''(s_0) + R(s).$$

Como $\alpha(s) - T(s)$ é um vetor no sentido do semi-plano que contém $\alpha(s)$, segue da última relação que para todo s, suficientemente próximo de s_0, $\alpha''(s_0)$ tem o sentido do semiplano que contém os pontos $\alpha(s)$.

Como $k(s_0) =< \alpha''(s_0), n(s_0) >$, concluímos que se $k(s_0) > 0$, então $n(s_0)$ tem o mesmo sinal de $\alpha''(s_0)$, se $k(s_0) < 0$ então $\alpha''(s_0)$ e $n(s_0)$ têm sentidos opostos.

7. Involutas e Evolutas

Nos exemplos anteriores vimos que, a menos de sinal, a curvatura de uma circunferência de raio r é igual a $\dfrac{1}{r}$, o que comprova a nossa intuição pois no caso da circunferência pensamos, naturalmente, na recíproca do raio como medida da curvatura.

Definição 7.1. *Se $\alpha(s)$ é uma curva regular com curvatura $k(s) \neq 0$, a quantidade $\rho(s) = \dfrac{1}{|k(s)|}$ é denominada raio de curvatura de α em s. O círculo de raio $\rho(s)$ e centro $c(s) = \alpha(s) + \dfrac{1}{k(s)}n(s)$ é denominado círculo osculador e $c(s)$ é dito centro de curvatura. A medida que varia o parâmetro s, o centro de curvatura descreve uma curva β chamada a evoluta de α, cujas retas tangentes são ortogonais à curva α.*

Usando as equações de Frenet, vemos que

$$\beta'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k(t)}n'(t) - \frac{k'(t)}{k^2(t)}n(t) = -\frac{k'(t)}{k^2(t)}n(t).$$

Portanto temos que β é regular se, e somente se, $k'(t) \neq 0$. Os pontos singulares da evoluta de uma curva α são aqueles para os quais a curvatura de α possui um ponto crítico.

Definição 7.2. *A expressão da evoluta de α é dada por*

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}n(t) = \alpha(t) + \frac{|\alpha'(t)|^2}{< \alpha''(t), n(t) >}n(t). \tag{5}$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 7.3. Se o traço de uma curva α descreve um círculo de raio r e centro C, sua evoluta é a curva constante dada por $\beta(s) = C$.

De fato, parametrizando a curva α por

$$\alpha(s) = C + (r\cos\frac{s}{r}, rsen\frac{s}{R}), s \in [0, 2\pi],$$

temos que $k(s) = \dfrac{1}{r}$ e, portanto,

$$\beta(s) = \alpha(s) + r(-\cos\frac{s}{r}, -sen\frac{s}{r}) = C.$$

Exemplo 7.4. Considere a elipse $\alpha : [0, 2\pi] \to R^2$, definida por

$$\alpha(t) = (a\cos t, bsent).$$

A curvatura de α é dada por

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2sen^2t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

A evoluta de α, pela equação (5) é dada por

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (a\cos t, bsent) + \frac{a^2 + \sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}(-b\cos t, -asent) \\ &= (\frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b}sen^3t). \end{aligned}$$

O traço da evoluta da elipse é descrito pelo astróide $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$, que não é regular nos pontos $\beta(t)$, com $t = 0, \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$.

Exemplo 7.5. Considere a ciclóide dada pelo traço da curva α, definida por

$$\alpha(t) = (t - sent, 1 - \cos t), t \in (0, 2\pi).$$

Sua curvatura é dada por

$$k(t) = \frac{\cos t - 1}{(2 - 2\cos t)^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

A evoluta de α é a curva definida por

$$\beta(t) = (t - sent, 1 - \cos t) + \frac{2 - 2\cos t}{\cos t - 1}(-sent, 1 - \cos t) = (t + sent, \cos t - 1).$$

Observe que $\alpha(t + \pi) = \beta(t) + (\pi, 2)$. Logo, a menos de uma translação, a evoluta de α é a própria ciclóide.

Definição 7.6. *Uma involuta de uma curva regular β é uma curva que é ortogonal às retas tangentes de β.*

Portanto se β é a evoluta de α, então α é uma involuta de β.

8. Teorema Fundamental das Curvas Planas

Nosso objetivo é mostrar o teorema que garante que a função curvatura determina uma curva plana a menos de sua posição no plano.

Teorema 8.1. *a) Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I \subset R$, existe uma curva regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s, cuja curvatura é $k(s)$.*
b)A curva $\alpha(s)$ acima é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha^{'}(s_0) = v_0$, onde v_0 é um vetor unitário de R^2.
c) Se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura, então elas diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação L e uma translação T em R^2, tal que $\alpha(s) = (LoT)(\beta(s))$.

Demonstração: a) Consideremos $\theta(s) = \displaystyle\int_{s_0}^{s} k(s)ds$, onde $s_0 \in I$ é fixo. Fixemos um ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ de R^2 e $\lambda \in R$. Definimos uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ por

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos(\theta(s) + \lambda)ds,$$

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} sen(\theta(s) + \lambda)ds.$$

Vamos verificar que a curva assim definida está parametrizada pelo comprimento de arco s e sua curvatura é $k(s)$.

De fato, o referencial de Frenet é:

$$t(s) = \alpha^{'}(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), sen(\theta(s) + \lambda)),$$

$$n(s) = (-sen(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)),$$

e, portanto, temos que $|\alpha^{'}(s)| = 1$ e a curvatura de α é dada por

$$< t^{'}(s), n(s) >= \theta^{'}(s) = k(s).$$

b) Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s, cuja curvatura é $k(s)$. Das equações de Frenet temos que

$$(x^{''}, y^{''}) = k(-y^{'}, x^{'}),$$

isto é, $x(s)$ e $y(s)$ satisfazem as equações

$$x^{''} = -ky^{'},$$
$$y^{''} = kx^{'}.$$

Portanto, segue do teorema de unicidade de solução do sistema de equações diferenciais que fixados $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha^{'}(s_0) = v_0$ a curva α é única. (Ver [1]).

c) Sejam α e β duas curvas que têm a mesma curvatura. Fixado s_0, existe uma rotação L e uma translação T de R^2 tal que a curva $\overline{\alpha} = LoTo\beta$ satisfaz $\overline{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ e $\overline{\alpha}^{'}(s_0) = \alpha^{'}(s_0)$. Do item b) segue que $\overline{\alpha} \equiv \alpha$. Portanto, $\alpha = LoTo\beta$. •

9. Exercícios

1) Sejam a e b constantes não nulas. Verifique que a aplicação $\alpha(t) = (a\cos t, b$ sen $t), t \in R$ e uma curva parametrizada diferenciável. Descreva o traço de α. O que representa geometricamente o parâmetro t?

2) Obtenha uma curva regular $\alpha : R \to R^2$ tal que $\alpha(0) = (2, 0)$ e $\alpha^{'}(t) = (t^2, e^t)$.

3)Seja $\alpha : I \to R^2$ curva regular. Prove que $|\alpha^{'}(t)|$ é constante se, e somente se para cada $t \in I$, o vetor $\alpha^{''}(t)$ é ortogonal a $\alpha^{'}(t)$.

4) Considere a aplicação

$$\alpha(t) = (sent, \cos t + \log(\tan\frac{t}{2})), t \in (0, \pi).$$

Prove que:

a) α é curva parametrizada diferenciável.

b) $\alpha^{'}(t) \neq 0$ para todo $t \neq \frac{\pi}{2}$.

c) o comprimento da reta tangente, compreendido entre $\alpha(t)$ e o eixo y, é constante igual a 1.

O traço desta curva é chamado Tractriz.

5) Verifique que as curvas regulares $\alpha(t) = (t, e^t), t \in R$ e $\beta(r) = (\log r, r), r \in (0, \infty)$ têm o mesmo traço.

6)Obtenha uma reparametrização da ciclóide

$$\alpha(t) = (a(t - sent), a(1 - \cos t)), 0 < t < 2\pi,$$

pelo comprimento de arco.

7)Obtenha a curvatura das seguintes curvas regulares:

a) $\alpha(t) = (t, t^4), t \in R$.

b) $\alpha(t0 = (\cos(2\cos t - 1), sen(2\cos t - 1)), t \in R$, (cardióide).

c) $\alpha(t) = (t, \cosh t), t \in R$, (catenária).

8) Seja $\alpha(s)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s e tal que $k(s) > 0, \forall s$. Verifique que o comprimento de arco da evoluta de α entre s_0 e s_1 é igual à diferença entre os raios de curvatura em s_0 e s_1.

9)Caracterize todas as curvas regulares planas que têm curvatura constante.

10) Determine as curvas planas de curvatura $k(s) = \dfrac{1}{\cosh s}$.

11) Determine as curvas regulares do plano cujas retas tangentes se interceptam em um ponto fixo.

12) Determine as curvas regulares do plano cujas retas normais se interceptam em um ponto fixo.

Referências

[1] Figueiredo, D. G. de, "Equações Diferenciais Aplicadas," 12^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1979.

[2] H. Alencar e W. Santos, "Introdução às curvas planas", XV Escola de Geometria Diferencial, IMPA, 2008.

[3] P. V. Araújo, "Geometria Diferencial", Matemática Universitária, IMPA, 1998.

[4] G. Ávila, "Cálculo das funções de uma variável", L.T.C., 2003.

[5] M. P. Do Carmo, "Geometria Diferencial das Curvas e Superfícies", Coleção Textos Universitários, S.B.M., 2005.

[6] G. Reis e V. Silva, "Geometria Analítica", L.T.C., 1995.

[7] K. Tenenblat, "Introdução à Geometria Diferencial", Editora Universidade de Brasília, 1990.

Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues

UnB - Departamento de Matemática

e-mail:luavila@mat.unb.br.