UFG XXIII Semana do IME
Universidade Federal de Goiás

Goiânia, 07 a 10 de outubro

# Mini Curso

# O Lema de Lax-Milgram e Aplicações

Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo - IME/UFG

# O LEMA DE LAX-MILGRAM E APLICAÇÕES

MELO,M.M.

## 1. Introdução

O principal objetivo destas notas é apresentar algumas técnicas usadas em análise para resolver problemas envolvendo equações diferenciais parciais lineares e não linerares. Apresentaremos e faremos a demonstração do lema de Lax-Milgram em espaços de Hilbert e logo a seguir faremos três aplicações. As duas ferramentas principais a serem usadas no texto são o teorema da representação de Riesz, que pode ser encontrado na referência [13] e o teorema do ponto fixo de Schauder, que pode ser encontrado, por exemplo, nas referências [5] ou [9]. Os conhecimentos básicos para a leitura do texto, embora não são estritamente necessários, são noções de teoria das distribuições e espaços usuais de Sobolev, que podem ser encontrados, por exemplo, nas referências [8] e [1] respectivamente.

## 2. Notações, Definições e Resultados Básicos

No que segue, denotaremos por $C_c^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ um aberto, o espaço das funções de classe $C^\infty$ com suporte compacto em $\Omega$. Se $\alpha \in N^n$, $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições de $u$, isto é, $(D^\alpha u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\,(u, D^\alpha \varphi)$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\Delta$ é o operador laplaciano. Por $H^k$ denotaremos o espaço usual de Sobolev modelado em $L^2$, isto é, $H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq k\}$. A aplicação

$$H^k \times H^k : (u,v) \mapsto \langle u,v\rangle_k = \sum_{|\alpha|\leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2},$$

define um produto interno em $H^k$. O número $\|u\|_k$, definido por

$$||u||_k = \sqrt{\langle u,u\rangle_k}$$

é a norma em $H^k$ que provém do produto interno acima. Definimos também o espaço $H_0^k(\Omega)$ como sendo o fecho em $H^k(\Omega)$, na norma de $\|\cdot\|_k$, do espaço $C_c^\infty(\Omega)$, isto é, $H_0^k(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_k}$. Observemos que $H^k(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$ são exemplos de espaços de Hilbert, isto é, espaço vetorial normado, onde a norma provém de um produto interno e que é completo em relação à norma.

A seguir enunciaremos e demonstraremos o lema de Lax-Milgram, que pode ser encontrado, por exemplo, nas referências [3] ou [5].

**Teorema 2.1.** *(O lema de Lax-Milgram) Sejam $H$ um espaço de Hilbert e*

$$B : H \times H \to R, \quad (u,v) \to B(u,v)$$

*uma forma bilinear, contínua e coerciva, isto é, linear separadamente em cada coordenada e existem $\alpha,\ \beta > 0$ tais que*

$$1)|B(u,v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \quad u,v \in H \text{ (continuidade)}$$
$$2)\ \beta \|u\|^2 \leq B(u,u), \quad u \in H \text{ (coercividade).}$$

*Para todo $F \in H'$ ($F : H \to R$, linear e contínuo), existe um único $u \in H$ tal que*

$$B(u,v) = F(v), \quad v \in H.$$

Demonstração: Primeiramente demonstremos a unicidade. Suponhamos que existam $u_1,\ u_2 \in H$, tais que

$$B(u_1,v) = F(v), \quad B(u_2,v) = F(v), v \in H.$$

Da linearidade de $B$, segundo a primeira variável, temos para qualquer $v \in H$, a igualdade

$$B(u_1 - u_2, v) = 0.$$

Em particular, tomando $v = u_1 - u_2,$ obtemos a igualdade

$$B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Da hipótese (2) sobre $B$, temos que

$$\beta||u_1 - u_2||^2 = 0,$$

portanto $u_1 = u_2$.

Agora demonstraremos a existência; para isto usaremos o teorema da representação de Riesz em espaços de Hilbert. Fixemos $u \in H$ e definimos a aplicação

$$H :\to R,\ v \to B(u,v).$$

Esta aplicação é linear e contínua. Pelo teorema de Riesz, existe um único $w \in H$ tal que

$$B(u,v) = \langle w, v\rangle,\ v \in H.$$

Isto define uma aplicação

$$A : H \to H,\ u \to w = A(u), \quad \text{isto é},$$
$$B(u,v) = \langle A(u), v\rangle,\ v \in H.$$

Afirmamos que a aplicação $A$ é linear, contínua e bijetora. Realmente,

$$\begin{aligned}\langle A(u_1 + u_2), v\rangle &= B(u_1 + u_2, v) = B(u_1,v) + B(u_2,v)\\ &= \langle A(u_1), v\rangle + \langle A(u_2), v\rangle = \langle A(u_1) + A(u_2), v\rangle,\ v \in H.\end{aligned}$$

Portanto

$$A(u_1 + u_2) = A(u_1) + A(u_2).$$

Claramente $A(ku) = kA(u)$.

Observemos que

$$||A(u)||^2 = \langle A(u), A(u)\rangle = B(u, A(u) \leq \alpha||u||||A(u)||.$$

De onde obtemos a desigualdade

$$||A(u)|| \leq \alpha||u||.$$

Isto demonstra a continuidade.

Para demonstrar a injetividade de $A$, primeiramente observemos que

$$||A(u)||||u|| \ \geq |\langle A(u), u\rangle| = |B(u,u)| \geq \beta||u||^2.$$

E portanto, temos a desigualdade

$$||A(u)|| \ \geq \beta||u||. \tag{1}$$

Agora, se $A(u_1) = A(u_2)$, então $A(u_1 - u_2) = 0$, e assim

$$0 = ||A(u_1 - u_2)|| \ \geq \beta||u_1 - u_2||,$$

de onde cocluimos que $u_1 = u_2$.

Para provar a sobrejetividade, denotaremos por $R(A)$ a imagem de $A$ e queremos provar que $R(A) = H$. Mostremos que $R(A)$ é fechado. Seja $w_n \in R(A)$ com $w_n \to w$. Existe $u_n \in H$ tal que $A(u_n) = w_n$. A desigualdade (1) fornece a estimativa

$$||u_n - u_m|| \ \leq \frac{1}{\beta}||A(u_n) - A(u_m)|| = \frac{1}{\beta}||w_n - w_m||.$$

Como $\{w_n\}$ é de Cauchy, temos que $\{u_n\}$ é de Cauchy, e devido a complectude de $H$, existe $u \in H$ tal que $u_n \to u$. Agora a continuidade de $A$ fornece o diagrama

$$\begin{array}{ccc} w_n & = & A(u_n) \\ & & \downarrow \\ w & = & A(u), \end{array}$$

e portanto $w_n \to w$; assim $R(A)$ é fechado em $H$. A seguir mostraremos que $R(A)$ é denso em $H$. Para isto usaremos o seguinte resultado da análise em espaços de Hilbert: *Sejam $V_1 \subset V_2$ espaços de Hilbert. Se $v \in V_2$ é tal que $0 =< v, w >$, $w \in V_1$, então $v = 0$, neste caso $V_1$ é denso em $V_2$.* Agora seja $v \in H$, tal que $v$ seja ortogonal a $R(A)$, isto é,

$$0 = \langle A(u), v\rangle\,,\ u \in H,\ \text{mas}$$

$$\langle A(u), v\rangle = B(u,v),\ u \in H.$$

Em particular tomemos $u = v$ e teremos $0 = B(v,v)$ e como $\beta||v||^2 \leq B(v,v) = 0$, segue que $v = 0$. Assim $R(A)$ é denso e fechado em $H$, portanto $R(A) = H$, o que implica na sobrejetividade do operador $A$.

Voltemos à demonstração da existência. Como $A : H \to H$ é uma bijeção, seja $S$ o seu inverso, isto é,

$$S : H \to H,\ w \to u = S(w) = A^{-1}(w),$$

(operador solução) que é contínuo, pois

$$||u|| \ \leq \frac{1}{\beta}||A(u)|| \quad \text{e como } A(u) = w, \text{ segue que } S(w) = u \text{ e portanto}$$

$$||S(w)|| \ \leq \frac{1}{\beta}||w||, \qquad ||S|| \ \leq \frac{1}{\beta}.$$

Isto conclui a demonstração do teorema.

A seguir enunciaremos o teorema do ponto fixo devido a Schauder, que será usado no exemplo 3.3.

**Teorema 2.2.** *Sejam $X$ um espaço de Banach, $B \subset X$ um conjunto convexo, limitado e fechado e $T : B \rightarrow B$ uma transformação contínua e compacta, então existe ponto fíxo, isto é, existe $x \in B$ tal que $T(x) = x$.*

## 3. Aplicações

**Exemplo 3.1.** *Dado $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ aberto, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, em\ \Omega \\ u = 0, \quad em\ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

*tem única solução $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: faremos inicialmente a formulação variacional do problema (2). para isto multiplicando a equação por $v \in C_c^\infty(\Omega)$, em seguida integrando em $\Omega$ e aplicando integração por partes, obtemos a expressão

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv.$$

Chamando

$$B(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)dx = \langle u, v\rangle_1\,, \tag{3}$$

temos que $B : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow R$ é bilinear. A desiguadade de Cauchy-Schwartz fornece a estimativa

$$|B(u,v)| \ \leq ||u||_1||v||_1,$$

assim $B$ é contínua. Fazendo $v = u$ em (3), obtemos que

$$|B(u,u)| \ = ||u||_1^2,$$

portanto a coercividade de $B$.

Por outro lado, definindo $F : H_0^1 \rightarrow R$, por

$$F(v) = \int_\Omega fvdx,$$

temos, imediatamente que $F$ é linear e contínua e portanto, pelo Lema de Lax-Milgram 2.1, existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$B(u,v) = F(v),\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Esta $u$ é a solução de nosso problema.

**Exemplo 3.2.** *Dado $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ aberto limitado, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f,\ em\ \Omega \\ u = 0, \quad em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

*tem única solução $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Seguindo os mesmos passos do exemplo acima, definimos $B : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow R$ e $F : H_0^1 \rightarrow R$ , respectivamente, por

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \ \text{ e } \ F(v) = \int_\Omega fvdx.$$

A linearidade e continuidade de $F$ já foram verificadas acima. Claramente $B$ é bilinear e

$$|B(u,v)| = |\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx| \ \le ||u||_1||v||_1,$$

produzindo portanto a continuidade de $B$.Usando a desigualdade de Poincaré, dada abaixo, válida em domínios limitados

$$(5) \qquad ||u||_k \le C(\Omega, k) \sum_{|\alpha|=k} \langle D^\alpha u, D^\alpha u\rangle_{L^2}\ , \ u \in H_0^k(\Omega),$$

temos que

$$B(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 = |||\nabla u|||^2_{L^2} \ge \frac{1}{C(\Omega)}||u||_1^2.$$

Concluimos portanto, que $B$ é coerciva. A solução do problema (4) é obtida via o teorema de Lax-Milgram.

A seguir usaremos o Lema de Lax-Milgram para estudar um problema não linear.

**Exemplo 3.3.** *Consideremos o seguinte problema: Encontrar $p$ e $k$ de modo que dada $f \in L^p(\Omega)$, existe uma única $u \in H_0^k(\Omega)$ tal que*

$$(6) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f + u^2, \ em\ \Omega \subset R^n \\ u = 0 \quad em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Na tentativa de resolver este problema, dividiremos o procedimento em quatro passos a seguir

$1^0$ passo: Dada $g \in L^2(\Omega)$, pelo exemplo (3.2), existe uma única solução $w \in H_0^1(\Omega)$, para o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = g, \ em\ \Omega \subset R^n \\ w = 0, \quad em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Na realidade, devido à teoria de regularidade, ver [6], a solução $w$ está também em $H^2(\Omega)$ e pela desigualdade de Poincaré (5), temos a estimativa

$$(7) \qquad ||w||_2 \le C||g||_{L^2}.$$

$2^0$ passo: A solução é ponto fixo da seguinte transformação: Dado $v \in E$ (a ser escolhido), seja $w = T(v)$ a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = f + v^2, \ em\ \Omega \subset R^n \\ w = 0, \quad em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

O ponto fixo $u$ de $T$, se existir, é solução do problema (6). Observemos que se $v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$||v^2||_{L^2} = (\int_\Omega |v|^4)^{1/2} = [(\int_\Omega |v|^4)^{1/4}]^2,$$

e portanto $||v^2||_{L^2} = ||v||^2_{L^4}$ e assim

$$||v^2||_{L^2} \le C||v||_1^2 < \infty,$$

onde usamos a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, caso particular da imersão $H_0^k(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad 2 \le q \le \frac{2n}{n-2k}$, quando $n = 3$ e $k = 1$. Assim se $(f + v^2) \in L^2$, o primeiro passo garante que $w \in H_0^1(\Omega)$, portanto temos a aplicação

$$T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega).$$

$3^0$ passo: A seguir demonstraremos que a transformação $T$ definida acima tem um ponto fixo. Para isto uzaremos o teorema do ponto fixo de Schauder, teorema 2.2.

Afirmamos que $T$ dada acima é compacta, isto é, se $D \subset H_0^1(\Omega)$ é limitado, então $T(D)$ é relativamente compacto em $H_0^1(\Omega)$. Realmente, se $v \in D$ temos que $w = T(v)$ satisfaz a desigualdade

$$||w||_2 \leq C||f + v^2||_{L^2} \leq .C(||f||_{L^2} + ||v^2||_{L^2}) \leq C(||f||_{L^2} + C||v||_1^2).$$

Como $H^2 \subset H^1$, segue que $T(D)$ é relativamente compacto em $H_0^1(\Omega)$ $(||w||_1 \leq ||w||_2 \leq C(||f||_{L^2} + C||v||_1^2)$.

Afirmamos que $T$ é contínua; realmente, sejam $v_1, \ \ v_2 \in H_0^1(\Omega)$, $w_1 = T(v_1)$ e $w_2 = T(v_2)$, avaliemos $||T(v_1) - T(v_2)||_1$. Temos que

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = f + v_1^2, \\ -\Delta w_2 = f + v_2^2. \\ (w_1 - w_2)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Da estimativa (7), obtemos as desigualdades

$$\begin{aligned} ||w_1 - w_2||_1 &\leq ||w_1 - w_2||_2 \leq C||v_1^2 - v_2^2||_{L^2} \\ &= C[\int_\Omega |v_1 + v_2|^2 |v_1 - v_2|^2]^{1/2} \\ &\leq C(\int_\Omega |v_1 + v_2|^4)^{\frac{1}{4}} (\int_\Omega |v_1 - v_2|^4)^{\frac{1}{4}} \\ &= C||v_1 + v_2||_{L4} ||v_1 - v_2||_{L4}. \end{aligned}$$

E assim temos a desigualdade

$$||w_1 - w_2||_1 \leq C||v_1 + v_2||_1 ||v_1 - v_2||_1. \tag{8}$$

$4^0$ passo: Encontrar um convexo fechado e limitado adequado. Tentemos bolas centradas na origem. Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $||v||_1 \leq R$. Temos que

$$||w||_1 = ||T(v)||_1 \leq ||w||_2 \leq C||f||_{L^2} + C||v||_1^2 \leq C||f||_{L^2} + CR^2 \leq R.$$

Portanto basta escolher $R$ suficientemente pequeno de modo que

$$C||f||_{L^2} + CR^2 - R \leq 0.$$

Observemos que, para que isto ocorra, basta impor a seguinte condição sobre $f$

$$4C^2||f||_{L^2} < 1.$$

Assim tomando $p = 2$ e $||f||_{L^2}$ suficientemente pequena (satisfazendo a condição acima) o problema (6) tem solução em $H_0^1(\Omega)$.

Resta mostrar a unicidade. Para isto suponhamos que existam duas soluções $u_1$ e $u_2$ de (6). Da desigualdade (8), temos que

$$\begin{aligned} ||u_1 - u_2||_1 &\leq C(||u_1||_1 + ||u_2||_1)||u_1 - u_2||_1 \\ &\leq 2CR||u_1 - u_2||_1. \end{aligned}$$

Escolhendo $R$ tal que $2CR \leq 1$ obtemos, da estimativa acima, que

$$||u_1 - u_2||_1 \leq ||u_1 - u_2||_1,$$

e portanto a unicidade.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos professores do IME-UFG, pelo incentivo recebido para que estas notas viessem a ser escritas e apresentadas na XXIII semana do instituto.

## Referências

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York, 1975.

[2] J. Barros Neto, *An Introduction to the Theory of Distributions,* Marcel Dekker Inc., New York, 1973.

[3] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Masson, Paris, New York, São Paulo, 1987.*

[4] T. Cazenave & A. Haraux, *Introduction aux Problèmes d'Évolution Semi-Linéaires,* Mathematiques & Applications, Ellipses, Paris 1990.

[5] L. C., Evans, *Partial Diferential Equations, Berkeley Mathematics Lecture Notes,* Berkeley, volume 3B,1993.

[6] G. B., Folland, *Introduction to Partial Diferential Equations, Princeton University Press* · Princeton, New Jersey*, 2ª Edition*, 1995.

[7] A. Friedman, *Partial Differential Equations,* Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1969.

[8] J. Hounie, *Teoria Elementar das Distribuições,* 12o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1979.

[9] G. Łukaszewicz, *Micropolar Fluids, Theory and Applications,* Birkhäuser, Boston · Basel · Berlin, 1999.

[10] M. M. Melo, *Introdução à Teoria de Semigrupos,* Publicações IME-UFG, Goiânia, 2004.

[11] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[12] M. Reed & B. Simon, *Functional Analysis,* Academic Press, Inc., vol. 1, New York, 1973.

[13] W.Rudin, *Real and comlex Analysis,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[14] L. Schwartz, *Théorie des distributions.* Nouvelle ed. Hermann, Paris, 1966.

Maurílio Márcio Melo
UFG - Instituto de Matemática e Estatística
melo@mat.ufg.br