



XXIII Semana do IME

Universidade Federal de Goiás

Goiânia, 07 a 10 de outubro

Mini Curso

Tópicos em passeios aleatórios

Ms. Valdivino Vargas Júnior - Doutorando/IME/USP

TÓPICOS EM PASSEIOS ALEATÓRIOS

VARGAS JÚNIOR, V.

1. INTRODUÇÃO

Considere a seguinte situação hipotética. Um jogador entra em um cassino com X reais em dinheiro para “tentar a sorte”. Admita que ele participa de um jogo que consiste de apostas independentes. Em cada aposta ele recebe um real em caso de vitória e caso contrário perde um real. A chance de vitória em cada aposta é p e conseqüentemente de derrota $1-p = q$. Admita que os recursos do cassino são ilimitados, isto é, por mais sorte que o jogador tenha, não consegue “quebrar a banca”. Suponha que ele jogue indefinidamente, apenas parando em caso de ficar sem dinheiro. Uma questão interessante é saber qual é a probabilidade do jogador em algum momento ficar sem dinheiro. A teoria mostra que mesmo no caso de um “cassino justo” (isto é, $p = 0.5$), esta probabilidade é 1. Tal problema é conhecido como ruína do jogador. Entretanto, é bom ressaltar que no caso de o jogador ter probabilidade p superior a 50 por cento em cada aposta existe probabilidade positiva do jogador nunca ficar sem dinheiro.

Este é apenas um simples exemplo de processos que podem ser estudados a partir da teoria de passeios aleatórios. Estes são a formalização matemática de uma trajetória (de uma partícula, digamos) a partir de uma seqüência de passos dados de forma aleatória. Diversas áreas do conhecimento como estatística, economia, computação, ecologia, dentre outras fazem uso de resultados oriundos desse majestoso modelo.

Definição 1.1. *Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $E|X_i| < \infty$. Seja $S_0 = C$ e*

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1.$$

O processo $\{S_n, n \geq 0\}$ é chamado passeio aleatório.

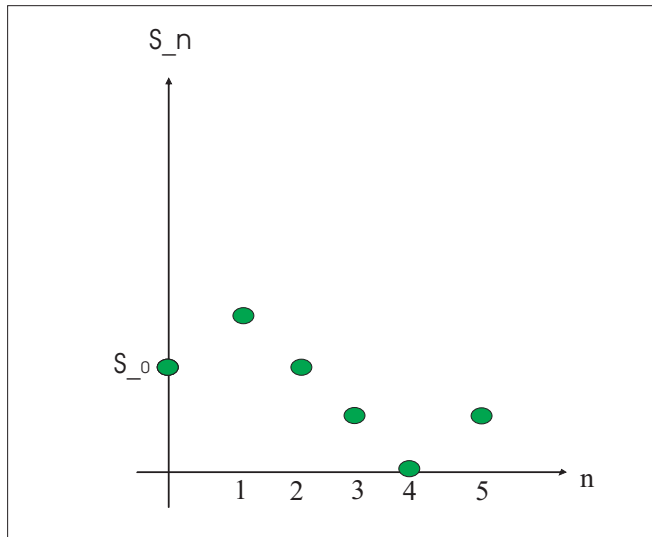
Exemplo 1.2. *Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que*

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p \text{ e } \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p = q.$$

Temos um passeio aleatório simples. Se além disso, $p = q$ temos um passeio aleatório simples simétrico.

Figura 1.1. *Uma realização de um passeio aleatório simples.*

Nesta figura, as elipses representam sucessivas posições do passeio. Nesse caso, $S_0 = 2, S_1 = 3, S_2 = 2$ e assim por diante. O passeio visita a origem no quarto



passo. A nomenclatura segue da visualização de S_n como a posição de uma partícula inicialmente em S_0 , e então faz uma série de passos unitários independentes, cada passo sendo positivo com probabilidade p ou negativo com probabilidade $1-p$. Em alguns momentos usaremos a notação $(0, S_0)$ para (n, S_n) para dizer que um passeio partiu de S_0 no instante 0 e está em S_n no instante n .

É fácil ver que na dinâmica da ruína do jogador, o capital acumulado pelo jogador ao longo das apostas pode ser visto como um passeio aleatório simples. Nesse caso, a variável aleatória X_i representa o ganho do jogador na i -ésima jogada.

Exemplo 1.3. Defina $S_0 = i$, $i > 0$ e

$$S_{n+1} = 0, \text{ se } S_n = 0 \text{ e}$$

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \text{ se } S_n \neq 0, \text{ onde } \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(X_{n+1} = -1) = \frac{1}{2}$$

Temos um passeio aleatório com barreira absorvente na origem.

Exemplo 1.4. Considere o espaço de estados $\{0, 1, \dots, d\}$ e variáveis aleatórias independentes entre si tais que

$$\text{Se } S_n \in \{1, 2, \dots, d-1\} \text{ então } \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = p \text{ e } \mathbf{P}(X_{n+1} = -1) = 1 - p = q$$

$$\text{Se } S_n = 0 \text{ então } \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = p \text{ e } \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = 1 - p = q$$

$$\text{Se } S_n = d \text{ então } \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = p \text{ e } \mathbf{P}(X_{n+1} = -1) = 1 - p = q$$

Temos um passeio aleatório com barreiras de retenção.

Exemplo 1.5. Seja $(X_n, n \geq 1)$ uma coleção de variáveis aleatórias independentes tais que

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \lambda_n$$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = -1) = \mu_n$$

onde

$$\lambda_n + \mu_n = 1.$$

Temos um passeio aleatório não homogêneo.

Exemplo 1.6. *Considere uma partícula realizando movimentos aleatórios sobre os vértices de um cubo. Seja $S = \{i : 1 \leq i \leq 8\}$ os vértices do cubo e*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{n+1} = j | S_n = i) &= \frac{1}{3} \text{ se } i \text{ e } j \text{ estão conectados e} \\ \mathbf{P}(S_{n+1} = j | S_n = i) &= 0 \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

Temos um passeio aleatório no cubo. Neste, a cada passo a partícula escolhe saltar para um vértice vizinho, tendo a mesma probabilidade de salto para cada um deles.

Exemplo 1.7. *Sejam $(X_n, n \geq 1)$ variáveis aleatórias assumindo valores reais tal que*

$$\mathbf{P}(X_n \leq x) = \Gamma(-\infty, x).$$

Tome $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Temos um passeio aleatório sobre a reta.

2. CONCEITOS BÁSICOS

2.1. Definições. Destacaremos nessa seção alguns conceitos importantes.

Definição 2.1. *Primeira passagem de i para k .*

Seja um passeio aleatório, onde $S_0 = i$. O tempo de primeira passagem é definido por

$$T_{i,k} = \min\{n > 0; S_n = k\}$$

Quando $i = k$, a variável aleatória $T_{k,k}$ é chamada tempo de recorrência de k . Neste caso nós escreveremos simplesmente T_k .

Uma propriedade interessante do tempo de primeira passagem no caso de passeios aleatórios simples é que os passos após a primeira passagem em k é independente das passagens anteriores. Assim, nós podemos escrever, por exemplo

$$T_{0,2} = T_{0,1} + T_{1,2},$$

onde $T_{0,1}$ e $T_{1,2}$ são independentes e têm a mesma distribuição já que as X_i são identicamente distribuídas.

Definição 2.2. *Range.*

O range R_n do passeio é a quantidade de valores distintos que o passeio assume até o passo n . Isto é, o número de valores distintos em (S_0, S_1, \dots, S_n)

Definição 2.3. *Tempo de parada.*

Sejam X_1, X_2, \dots uma seqüência de variáveis aleatórias independentes. Uma variável aleatória N é dita tempo de parada para esta seqüência se o evento $\{N = n\}$ é independente de X_{n+1}, X_{n+2}, \dots para todo $n=1, 2, \dots$

No caso de um passeio aleatório o tempo de primeira passagem é um exemplo de tempo de parada. Intuitivamente falando, assistindo ao processo é possível saber o instante em que T_j ocorre. Em outras palavras, se $\{T_j = n\}$ nós paramos após observar X_1, \dots, X_n e antes de observar X_{n+1}, X_{n+2}, \dots

Teorema 2.4. Equação de Wald

Se $X_i \geq 1$ são v.a.i.i.d. tal que $E|X_i| < \infty$ e se N é um tempo de parada para X_1, X_2, \dots com $E[N] < \infty$, então

$$E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E[N]E[X_1].$$

Exemplo 2.5. Considere um passeio aleatório simples assimétrico com $p > \frac{1}{2}$. O número esperado de passos até o passeio alcançar a posição k , $k > 0$ é

$$E[N] = \frac{k}{2p - 1}$$

Demonstração. Observe que $E|X_1| = 1 < \infty$. Além disso

$$\sum_{j=1}^N X_j = k \Rightarrow E\left[\sum_{j=1}^N X_j\right] = k$$

Como $E(X_1) = 2p - 1$ basta usar a equação de Wald para obter o resultado. \square

2.2. Recorrência e transiência. Seja $(S_n, n \geq 0)$ um passeio aleatório. Nós dizemos que um estado i é recorrente se

$$\mathbf{P}(S_n = i \text{ para infinitos } n) = 1$$

Nós dizemos que um estado i é transiente se

$$\mathbf{P}(S_n = i \text{ para infinitos } n) = 0$$

Introduza agora o número de visitas V_i ao estado i . Temos:

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n=i\}}$$

Então

$$E(V_i) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n=i\}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E(1_{\{S_n=i\}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = i).$$

Introduza também a probabilidade de retorno

$$f_i = \mathbf{P}(T_i < \infty)$$

É possível mostrar que

- se $\mathbf{P}(T_i < \infty) = 1$, então i é recorrente e
- se $\mathbf{P}(T_i < \infty) < 1$ então i é transiente.

Além disso, todo estado, ou é recorrente ou é transiente. Por fim, podemos afirmar que para um estado recorrente a probabilidade de um eventual retorno é 1 enquanto que num estado transiente existe probabilidade de nunca haver retorno.

Proposição 2.6. *Para qualquer passeio aleatório, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $f_0 = \mathbf{P}(T_0 < \infty) = 1$
- ii) $\mathbf{P}(S_n = 0 \text{ infinitas vezes}) = 1$
- iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = \infty$.

Demonstração. Exercício. □

3. PASSEIO ALEATÓRIO SIMPLES

Ao longo dessa seção

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$$

é um passeio aleatório simples. Estamos assumindo sem perda de generalidade, $S_0 = 0$.

3.1. Resultados elementares.

Teorema 3.1.

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

Demonstração. Considere uma realização do passeio aleatório de $(0,0)$ para (n, S_n) com r passos positivos e s passos negativos. Se $S_n = k$ então $r-s = k$ e $r+s=n$. Logo $r = \frac{n+k}{2}$ e $s = \frac{n-k}{2}$. O número de tais realizações é $\binom{n}{r}$ e cada uma tem a mesma probabilidade, a saber $p^r q^s$. Então

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \binom{n}{r} p^r q^s$$

□

Teorema 3.2. *O passeio aleatório simples simétrico em \mathbb{Z} ($p=q=\frac{1}{2}$) é recorrente.*

Demonstração. Basta mostrar que o estado 0 é recorrente. Sem perda de generalidade assumamos $S_0 = 0$. Então, usando a Proposição 2.6 precisamos mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = \infty$$

É claro que não podemos retornar a 0 em um número ímpar de passos. Isto é

$$\mathbf{P}(S_{2n+1} = 0) = 0 \text{ para todo } n.$$

Note que qualquer seqüência de passos de tamanho $2n$ de 0 para 0 é constituída de n passos para cima e n passos para baixo e ocorre com probabilidade $(0,5)^n (0,5)^n = (0,25)^n$. Além disso, observe que existem $\binom{2n}{n}$ modos de escolher n passos dentre $2n$. Então

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (0,25)^n$$

Entretanto, a fórmula de Stirling nos dá uma boa aproximação de $n!$ para n grande:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ onde } a_n \sim b_n \text{ significa } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$$

Assim, para algum N suficientemente grande e todo $n \geq N$

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}$$

Assim

$$\sum_{n=N}^{\infty} \mathbf{P}(S_{2n} = 0) \geq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} = \infty$$

e o passeio é recorrente. □

3.2. Dualidade em Passeios aleatórios e Princípio da reflexão.

Afirmção 3.1. Princípio da dualidade

(X_1, X_2, \dots, X_n) tem a mesma distribuição conjunta de $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)$

A validade do princípio da dualidade é imediata já que as X_i , $i > 1$ são independentes e identicamente distribuídas.

Proposição 3.3. Princípio da Reflexão

Se x e y são positivos então o número de passeios de $(0, x)$ para (n, y) que tocam o eixo x é igual ao número de passeios de $(0, -x)$ para (n, y) .

Demonstração. Exercício. □

Teorema 3.4. Teorema do Primeiro acerto

Seja $b > 0$. Então num passeio aleatório simples

$$\mathbf{P}(T_{0,b} = n) = \frac{b}{n} \mathbf{P}(S_n = b)$$

Demonstração. Seja $N_n(0, x)$ o número de realizações possíveis de $(0, 0)$ para (n, x) (número de passeios de comprimento n saindo de 0 e chegando a x). Seja ainda $N_n^b(0, x)$ o número de realizações possíveis de $(0, 0)$ para (n, x) que passam em b pelo menos uma vez. Observe que se $T_{0,b} = n$ então $X_n = 1$ e $S_{n-1} = b-1$. Então existem $N_{n-1}(0, b-1)$ passeios de $(0, 0)$ para $(n-1, b-1)$ dos quais $N_{n-1}^b(0, b-1)$ visitam b no trajeto. Cada uma dessas realizações tem probabilidade $p^{\frac{n+b}{2}-1} q^{\frac{n-b}{2}}$. Usando o Princípio da reflexão:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_{0,b} = n) &= p(N_{n-1}(0, b-1) - N_{n-1}(0, b+1)) p^{\frac{n+b}{2}-1} q^{\frac{n-b}{2}} \\ &= \left[\binom{n-1}{\frac{n+b}{2}-1} - \binom{n-1}{\frac{n+b}{2}} \right] p^{\frac{n+b}{2}} q^{\frac{n-b}{2}} = \frac{b}{n} \mathbf{P}(S_n = b) \end{aligned}$$

□

O resultado a seguir mostra uma interessante propriedade do passeio aleatório simples simétrico.

$$\mathbf{P}(T_{0,1} < \infty) = 1, \text{ porém } E[T_{0,1}] = \infty$$

Proposição 3.5. Num passeio aleatório simples simétrico

$$E[T_{0,1}] = \infty$$

Demonstração.

$$E(T_{0,1}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{2m+1} = 1) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m+1}{m+1} 2^{-(2m+1)} = \infty$$

□

Teorema 3.6. Teorema de Ballot

Seja S_n um passeio aleatório simples com $S_0 = 0$. Então

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{2n-1} S_i \neq 0 \mid S_{2n} = 2r\right) = \frac{r}{n}$$

Demonstração. A prova é semelhante a da prova do teorema do primeiro acerto. Conte o número $N_{2n-1}^0(1, 2r)$ de realizações de $(1,1)$ para $(2n,2r)$ que visitam a origem. A idéia é refletir o passeio antes de seu primeiro 0 no eixo x, e assim mostrar que $N_{2n-1}^0(1, 2r) = N_{2n-1}(-1, 2r)$. Como todas as $N_{2n}(0, 2r)$ realizações são igualmente prováveis, a probabilidade requerida é

$$\frac{N_{2n-1}(1, 2r) - N_{2n-1}^0(1, 2r)}{N_{2n}(0, 2r)} = \frac{N_{2n-1}(1, 2r) - N_{2n-1}(-1, 2r)}{N_{2n}(0, 2r)} = \frac{r}{n}$$

□

Exemplo 3.7. Considere a seguinte situação. Em uma eleição após a contagem dos votos o candidato A garante a votos e o candidato B, b votos. Suponha $a > b$. Qual a probabilidade de que o candidato A liderou durante toda a contagem? O Teorema de Ballot diz que esta probabilidade é

$$\frac{a-b}{a+b}.$$

O próximo resultado parece surpreendente porém é verdadeiro.

Teorema 3.8. Seja $S_n, n \geq 0$ um passeio aleatório simples simétrico com $S_0 = 0$. Então

$$a) \mathbf{P}(T_0 = 2n) = \mathbf{P}(S_{2n-2} = 0) - \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$$

$$b) \mathbf{P}\left(\prod_{k=1}^{2n} S_k \neq 0\right) = \mathbf{P}(T_0 > 2n) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$$

Demonstração. Primeiro o item a. Pela simetria, princípio da reflexão e usando o teorema do primeiro acerto

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_0 = 2n) &= \frac{1}{2n-1} \mathbf{P}(S_{2n-1} = 1) = \frac{2^{-(2n-1)}}{2n-1} \binom{2n-1}{n} \\ &= \frac{2^{-2n}}{2n-1} \binom{2n}{n} = 2^{-2n+2} \binom{2n-2}{n-1} - 2^{-2n} \binom{2n}{n} \\ &= \mathbf{P}(S_{2n-2} = 0) - \mathbf{P}(S_{2n} = 0) \end{aligned}$$

Para o item b, observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_0 > 2n) &= 1 - \sum_{k=1}^n P(T_0 = 2k) = \sum_{k=1}^n [\mathbf{P}(S_{2k-2} = 0) - \mathbf{P}(S_{2k} = 0)] \\ &= \mathbf{P}(S_{2n} = 0) \end{aligned}$$

□

O próximo teorema lida com a taxa esperada na qual um passeio aleatório assume novos valores.

Teorema 3.9.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(R_n)}{n} = \mathbf{P}(\text{passeio aleatório nunca retorna a } 0)$$

Demonstração. Defina

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{se } S_k \neq S_{k-1}, S_k \neq S_{k-2}, \dots, S_k \neq S_0, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então

$$R_n = \sum_{k=1}^n I_k$$

Logo

$$\begin{aligned} E[R_n] &= 1 + \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(I_k = 1) = 1 + \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(S_k \neq S_{k-1}, S_k \neq S_{k-2}, \dots, S_k \neq S_0) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X_k \neq 0, X_k + X_{k-1} \neq 0, \dots, X_k + X_{k-1} + \dots + X_1 \neq 0) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X_1 \neq 0, X_1 + X_2 \neq 0, \dots, X_1 + X_2 + \dots + X_k \neq 0) \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da dualidade. Logo

$$E[R_n] = 1 + \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_k \neq 0) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(T_0 > k)$$

onde T_0 é o tempo do primeiro retorno a 0. Tomando $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T_0 > k) \rightarrow \mathbf{P}(T_0 = \infty) = \mathbf{P}(\text{passeio aleatório nunca retorna a } 0)$$

Daí segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(R_n)}{n} = \mathbf{P}(\text{passeio aleatório nunca retorna a } 0)$$

□

Corolário 3.10. *Considere um passeio aleatório simples assimétrico, com $p > \frac{1}{2}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(R_n)}{n} = 2p - 1$$

Demonstração. Exercício. □

Teorema 3.11. *Em um passeio aleatório simples simétrico o número esperado de visitas ao estado k antes de retornar a origem é igual a 1 para todo $k \neq 0$.*

Demonstração. Para $k > 0$ seja Y o número de visitas ao estado k antes do primeiro retorno a origem. Y pode ser escrito da seguinte forma

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$$

onde

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ é visitado no tempo } n \text{ e não há retorno a origem antes de } n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ou de modo equivalente:

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{se } S_n > 0, S_{n-1} > 0, \dots, S_1 > 0, S_n = k, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_n > 0, S_{n-1} > 0, \dots, S_n = k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n + \dots + X_1 > 0, X_{n-1} + \dots + X_1 > 0, \dots, X_1 = 0, X_n + \dots + X_1 = k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n > 0, X_2 + \dots + X_n > 0, \dots, X_n = 0, X_1 + \dots + X_n = k) \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da dualidade. Portanto

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_n > 0, S_n > S_1, \dots, S_n > S_{n-1}, S_n = k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\text{passeio aleatório simétrico acertar } k \text{ a primeira vez no tempo } n) \end{aligned}$$

$\mathbf{P}(\text{passeio aleatório sempre alcançar } k) = 1$ (pela recorrência).

□

3.3. O problema da ruína do jogador. Agora voltaremos nossa atenção para o problema da ruína do jogador descrito na introdução. Lembre que na dinâmica da ruína do jogador, o capital acumulado pelo jogador ao longo das apostas pode ser visto como um passeio aleatório. Nesse caso, a variável aleatória X_i representa o ganho do jogador na i -ésima jogada. Vamos mostrar que mesmo estando em um “cassino justo”, com probabilidade 1, o jogador fica sem dinheiro em algum momento.

Demonstração. Seja $h_i = \mathbf{P}_i(\text{acertar } 0)$. Então h é a solução minimal não negativa de

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_i &= \frac{1}{2}h_{i+1} + \frac{1}{2}h_{i-1} \text{ para } i=1,2,\dots \end{aligned}$$

Essa relação de recorrência tem solução geral

$$h_i = A + Bi$$

Mas a restrição $0 \leq h_i \leq 1$ força $B = 0$. Assim, $h_i = 1$ para todo i . Dando o resultado desejado. \square

4. Aplicações atuais em passeios aleatórios- Frog model

Dentre uma variedade enorme de trabalhos envolvendo passeios aleatórios apresentaremos como exemplo o modelo dos sapos (Frog Model). Este é um sistema de passeios aleatórios simples sobre um grafo. Este modelo pode ser descrito da seguinte forma. Existem partículas ativas e inativas sobre algum grafo. Cada partícula ativa realiza um passeio aleatório simples a tempo discreto. Quando uma partícula ativa salta sobre uma inativa, esta se torna ativa passando então a realizar um passeio aleatório simples a tempo discreto. No frog model existem algumas variações sobre a maneira pela qual uma partícula ativa desaparece. Em “Phase transition for the frog model” por exemplo, cada partícula ativa tem probabilidade $1-p$ de desaparecer a cada passo de seu passeio. A seguir apresentaremos a descrição de alguns artigos recentes envolvendo o frog model. A bibliografia completa destes artigos se encontra nas referências.

Random walks systems with killing em \mathbb{Z}

Considere um sistema de passeios aleatórios sobre \mathbb{Z} na qual cada partícula ativa realiza um passeio aleatório simples assimétrico e ativa todas as partículas inativas que encontra. O movimento de uma partícula pára quando ela alcança um certo número de saltos sem ativar nenhuma partícula. Neste artigo é provado que se o processo conta com partículas eficientes (pequena probabilidade de salto para à esquerda) localizadas estrategicamente sobre \mathbb{Z} o processo pode sobreviver, tendo partículas ativas em qualquer instante com probabilidade positiva. Caso contrário, é construído um processo que mesmo contanto com partículas eficientes morre quase certamente. Isto é o que acontece se as partículas estiverem localizadas inicialmente muito longe das outras ou se a sua probabilidade de salto para à direita tende a 1, porém não tão rápido.

CLT for the infected proportion of individuals for an epidemic model on a complete graph

Neste artigo, os autores provam um teorema central do limite para a proporção de indivíduos infectados para um modelo epidêmico constituído por um sistema de passeios aleatórios simples a tempo discreto sobre um grafo completo com n vértices. Cada passeio aleatório faz o papel de um vírus. Um vírus duplica em cada instante em que encontra um indivíduo susceptível e morre se acertar um indivíduo já infectado. O processo pára quando não existem mais vírus. Indivíduos estão todos

conectados como vértices em um grafo conexo. Este modelo é próximo a alguns problemas em epidemiologia e disseminação de vírus em uma rede de computador.

The shape theorem for frog model

Neste artigo, os autores provam um teorema de forma para um conjunto crescente de passeios aleatórios simples sobre \mathbb{Z}^d . A dinâmica do processo é a seguinte. Existem partículas ativas que realizam passeio aleatório simples a tempo discreto e partículas inativas que não se movem. Quando uma partícula inativa é acertada por uma ativa ela também se torna ativa. No tempo 0, todas as partículas estão inativas, exceto aquela localizada na origem. Os autores provam que o conjunto das posições originais de todas as partículas reescalada pelo tempo converge para algum conjunto convexo compacto.

Phase transition for the frog model

Neste artigo, têm-se um sistema de passeios aleatórios simples sobre um grafo. Existem partículas ativas e inativas sobre o grafo. Cada partícula ativa realiza um passeio aleatório simples a tempo discreto e em cada movimento desaparece com probabilidade $1-p$. Quando uma partícula ativa acerta uma partícula inativa, esta se torna ativa. Os autores apresentam resultados de transição de fase e valores assintóticos para parâmetros críticos para \mathbb{Z}^d e árvores regulares.

Self avoiding random walks on homogeneous trees

Neste artigo, os autores consideram um sistema de partículas sobre uma árvore homogênea. No tempo 0 existe uma única partícula sobre cada vértice da árvore estando apenas uma delas ativa. As outras se encontram inativas. Uma partícula ativa realiza um passeio aleatório simples a tempo discreto independente, tendo probabilidade $1-p$ de desaparecer em cada passo. Uma partícula inativa se torna ativa quando seu vértice é acertado por uma partícula ativa. Os autores provam resultado de transição de fase para esse modelo exibindo limites para a probabilidade crítica. A criticalidade é com respeito a positividade da probabilidade do evento existir partículas ativas em qualquer instante.

Random walk systems on complete graphs

Neste artigo, os autores estudam duas versões de sistemas de passeios aleatórios sobre grafos completos. No primeiro, os passeios aleatórios têm tempo de vida com distribuição geométrica. Neste caso, é identificado um parâmetro crítico relacionado a proporção de vértices visitados antes do processo morrer. Na segunda versão, o tempo de vida dos passeios dependem do passado do processo de modo não markoviano. Para esta versão são apresentados resultados obtidos de análise computacional, simulações e aproximações de campo médio.

REFERÊNCIAS

- [1] D. Stirzaker, Elementary Probability, Cambridge University Press, 2003.
- [2] F.P. Machado, E. Lebensztayn, M. Z. Martinez (2005) Self avoiding random walks on homogeneous trees

- [3] F.P. Machado, E. Lebensztayn, M. Z. Martinez (2008) Random walks systems with killing em \mathbb{Z}
- [4] F.P. Machado, H. Mashurian, H. Matzinger (2008) CLT for the infected proportion of individuals for an epidemic model on a complete graph
- [5] J. Norris, Markov Chains, Cambridge University Press, 1996.
- [6] R. Durrett, Probability: theory and examples, (2nd edn.), Duxburry, Belmont. Calif.
- [7] O.S.M. Alves, F.P. Machado, E. Lebensztayn, M. Z. Martinez (2006) Random walk systems on complete graphs
- [8] O.S.M. Alves, F.P. Machado, S.Yu. Popov (2002)Phase transition for the frog model.
- [9] .S.M. Alves, F.P. Machado, S.Yu. Popov (2000) The shape theorem for the frog model.
- [10] S.H. Ross, Stochastic Processes, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1996.
- [11] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley, New York,1966.

Valdivino Vargas Júnior
Doutorando USP/São Paulo
email: vvjuniorusp@yahoo.com.br