UFG

XXIII Semana do IME

Universidade Federal de Goiás

Goiânia, 07 a 10 de outubro

Mini Curso

Números: dos Naturais aos Reais

Prof. Ms. Eudes Antonio da Costa - UFT/Arraias
Prof. Ms. Ronaldo Antonio Santos - UFG/Rialma

NÚMEROS: DOS NATURAIS AOS REAIS

COSTA,E.A., SANTOS, R. A.

APRESENTAÇÃO

A invenção dos números é sem dúvida uma grande evolução do pensamento humano. Porém esta evolução deu-se fortemente apoiada a conceitos intuitivos deixando vários fatos sem explicação satisfatória. Um exemplo foi o problema enfrentado pela escola Pitagórica ao descobrir grandezas incomensuráveis (números irracionais). Um outro problema foi o de mostrar que todo conjunto de números reais limitado superiormente possui supremo, resultado de grande necessidade em análise.

Foi por volta de 1858 que Richard Dedekind(1831-1916) fez a construção formal dos números reais a partir dos números racionais. Posteriormente percebeu-se a necessidade da construção dos números naturais, inteiros e racionais. Em 1891 Giuseppe Peano (1858-1932) construiu de maneira formal o conjunto dos números naturais. E a partir deste conjunto podemos construir os números inteiros, racionais e reais.

Neste trabalho faremos uma apresentação histórica da construção (Fundamentação) dos Números Naturais seguindo o método axiomático. Aceitando os **Conceitos Primitivos** de **o zero, número natural** e **sucessor de** e os **Axiomas** de Peano:

A_1 - Zero é um número natural.
A_2 - Todo número natural tem um único sucessor que também é um número natural.
A_3 - Zero não é sucessor de nenhum natural.
A_4 - Dois números naturais que tem sucessores iguais são, eles próprios, iguais.
A_5 - Se uma coleção S de números naturais contém o zero e também contém o sucessor de todos os seus elementos, então S é o conjunto de todos os naturais.

Seguiremos mostrando algumas propriedades acerca dos números (Naturais, Inteiros, Racionais e Reais), destacando a necessidade (prática) de tais números e sua fundamentação.

1. Discussões Preliminares

O conjunto mais simples de números são os inteiros positivos: $1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots$ usados para contar (quantidade de objetos) e chamados de séries dos números naturais e cujo conjunto é representado por $\mathbb{N}$. Estes números são tão antigos que Kronecker supostamente disse "Deus criou os números naturais; todo o resto é obra do homem".

Em muitos textos o 0 (**zero**) é também considerado um número natural. Mais adiante quando formalizarmos (Axiomas de Peano) esse conjunto também o consideraremos.

Houve uma certa demora na invenção de um símbolo para representar o **nada**. Tal demora é justificada com o fato de que não sentimos necessidade em contar o que não temos. E a falta desse elemento causou inúmeros problemas de interpretação, já que no sistema de numeração posicional decimal, a ausência do zero causa confusão; por exemplo, como distinguir o número 32 do número 302 ou do 320; pois não sabemos se são 3 centenas ou 3 dezenas, ou ainda, se são 2 dezenas ou 2 unidades. Com o zero podemos colocar o algarismo na posição correta. Esses problemas se sucederam até que os hindus, no final do século VI, inventaram o zero.

O princípio posicional consiste em dar ao algarismo um valor que depende não apenas do valor que ele representa na seqüência natural; como também da posição que ocupa, com respeito aos outros algarismos. No ábaco, a "coluna vazia"representava o nada(zero), por isso, não havia a necessidade de um símbolo, somente quando houve necessidade de fazer um registro permanente de uma operação realizado no ábaco, que enfrentamos esta dificuldade. Assim um progresso só foi possível após a criação de um símbolo para a classe "vazia", um símbolo para o "nada", o nosso "zero"moderno.

O conjunto dos números naturais é, como sabemos, fechado com relação a adição e multiplicação, isto é,

$$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \mathbb{N}$$

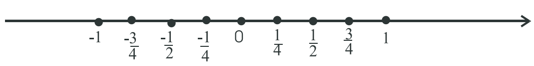
, e

$$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

Porém não é fechado com relação a subtração, pois, $a, b \in \mathbb{N}$ nem sempre implica em $a - b \in \mathbb{N}$. Portanto, além dos números naturais, são necessários outros símbolos para representar números como $3 - 5$ de modo a tornar o conjunto fechado com relação a subtração. Esses novos símbolos são os números negativos e o conjunto formado pela união desses aos naturais é chamado de conjuntos dos números inteiros e representado por $\mathbb{Z}$.

Dessa forma $\mathbb{Z}$ é fechado com relação a adição, multiplicação e subtração. No entanto não é fechado com relação a divisão, pois, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ a divisão de a por b pode não ser um número inteiro. O conjunto dos números inteiros é então acrescido dos símbolos $\frac{a}{b}$ para representar o resultado de tais divisões, obtendo um conjunto fechado com relação a divisão. Esse novo conjunto é chamado de conjunto de números racionais e denotado por $\mathbb{Q}$.

Todos esses números racionais podem ser representados como pontos em uma reta e estão relacionados ao "problema da medida", isto é, dados os segmentos AB e CD será que existe um segmento $OU = u$ chamada unidade, tal que $AB = m\dot{u}$ e $CD = n\dot{u}$? No caso afirmativo, os segmentos AB e CD são comensuráveis.



Os Pitagóricos acreditavam que os números racionais eram suficientes para medir qualquer segmento de reta. No entanto se surpreenderam ao constatar que não havia um número racional para medir a diagonal de um quadrado de lado 1. Portanto $\sqrt{2}$ não é racional, assim como π, $\sqrt{5}$, $\sqrt{1+\sqrt{3}}$,$sen(45^0)$, $2^{\sqrt{2}}$ e muitos outros.

O conjunto formado por todos os números racionais e irracionais é chamado de conjuntos de números reais e é denotado por $\mathbb{R}$.

O problema enfrentado pelos pitagóricos sugere a seguinte questão: Será que todo segmento de reta tem seu comprimento expresso por um número real? A resposta à essa questão é afirmativa e está ligada a completude dos números reais.

2. Fundamentação dos Números Naturais

Desde os primeiros anos do ensino fundamental estamos acostumados a trabalhar com *números naturais*, associando-os sempre à idéia de quantidade e utilizando-os para realizar contagens. Aprendemos a adicionar e multiplicar tais números, mas não estabelecemos exatamente o que eles são. Faremos isto nesta seção.

Tomemos como ponto de partida a série
$0, 1, 2, 3, ..., n, n + 1, ...$
é esta série que teremos em mente quando falarmos da "série dos números naturais". Sabemos que foi necessário muito tempo para aceitar que um par "cadeiras"e um casal de humanos são ambos manifestações da quantidade (número) 2. O grau de abstração envolvido está longe de ser fácil.

O método axiomático, introduzido por Euclides na geometria grega (clássica) no século III a.C. é na álgebra utilizado por Peano (somente no séc. XIX) para fundamentar de forma lógica a aritmética.

No método axiomático deve-se, em primeiro lugar, aceitar certos termos da teoria sem uma explicação formal. Estes termos são chamados de **Conceitos Primitivos** e em nosso caso são: **o zero, número natural** e **sucessor de**. Em segundo lugar aceitar certas sentenças (ou asserções) como verdadeiras (independente de demonstração), tais sentenças são chamadas de **Axiomas**.

A partir dos termos primitivos acima, Peano formulou cinco axiomas, são eles:

A_1 - Zero é um número natural.
A_2 - Todo número natural tem um único sucessor que também é um número natural.
A_3 - Zero não é sucessor de nenhum natural.
A_4 - Dois números naturais que tem sucessores iguais são, eles próprios, iguais.
A_5 - Se uma coleção S de números naturais contém o zero e também contém o sucessor de todos os seus elementos, então S é o conjunto de todos os naturais.

A teoria se completa com Proposições (Teoremas) que, a partir dos axiomas, podem ser demonstrados por raciocínio lógico e correto. Formularemos e demonstraremos algumas dessas proposições.

Proposição 1. *Existe um número natural diferente de zero.*

Demonstração. Suponha que não exista um número natural diferente de zero. Pelo axioma A_2, zero tem um sucessor, que é portanto o próprio zero. Mas isso contraria o axioma A_3, pois zero seria o sucessor de zero. Portanto existe um natural diferente de zero. $\square$

Usaremos o símbolo 0 para representar o número zero e o símbolo a^+ para indicar o sucessor de um número natural a. Além disso denotaremos o conjunto formado por todos os números naturais de $\mathbb{N}$.

Proposição 2. *Se $a \in \mathbb{N}$, então $a^+ \neq a$.*

Demonstração. Seja $S = \{a \in \mathbb{N}; a^+ \neq a\}$. Como vimos, o axioma A_3 garante que $0 \in S$. Se $a \in S$, então $a^+ \neq a$. Pelo axioma A_4 temos que $(a^+)^+ \neq a^+$, portanto $a^+ \in S$ sempre que $a \in S$. O axioma A_5 conclui que $S = \mathbb{N}$. □

Proposição 3. *Se $b \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$. Então existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a^+ = b$.*

Demonstração. Seja
$S = \{0\} \cup \{y \in \mathbb{N}; y \neq 0 \quad \text{e} \quad x^+ = y \quad \text{para algum} \quad x \in \mathbb{N}\}$. Por construção $0 \in S$. Se $a \in S$ e $a \neq 0$, então $b^+ = a$ para algum $b \in \mathbb{N}$. Decorre que $(b^+)^+ = a^+$ e portanto $a^+ \in S$. Novamente por A_5 temos que $S = \mathbb{N}$. □

Proposição 4. *Seja $S \subset \mathbb{N}$, não vazio, tal que $0 \notin S$. Então existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a \notin S$ e $a^+ \in S$.*

Demonstração. Suponha falsa a proposição. Tome $K = \{x \in \mathbb{N}; x^+ \notin S\}$, então $0 \in K$. Se $a \in K$ temos que $a^+ \notin S$, como estamos supondo falsa a afirmação, temos que $(a^+)^+ \notin S$ e portanto $a^+ \in K$. Concluímos por A_5 que $K = \mathbb{N}$, implicando $S = \emptyset$. Mas isso contradiz a hipótese. Logo a proposição está demonstrada. □

Proposição 5. *O conjunto dos números naturais não pode ser finito.*

Demonstração. O axioma A_2 garante que todo número natural tem sucessor. O Axioma A_3 diz que zero não é sucessor de nenhum número natural. Dessa forma, caso o conjunto dos numeros naturais seja finito, com n elementos, teremos que os n sucessores devem estar entre $n-1$ elementos o que obriga um elemento a ser sucessor de pelo menos dois elementos distintos, contrariando o axioma A_4. Concluímos que $\mathbb{N}$ não pode ser finito. □

Proposição 6. *(Princípio da indução completa) Suponha que a todo natural n esteja associada uma afirmação $P(n)$ tal que:*
i) $P(0)$ é verdadeira.
ii) $P(r^+)$ é verdadeira sempre que $P(r)$ for verdadeira.
Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Decorre diretamente de A_5. □

Outras proposições podem ser formuladas e sendo provadas, a partir dos axiomas e das proposições precedentes, passam a fazer parte da teoria.
A nossa próxima etapa é definir as operações de adição e multiplicação e uma relação de ordem no conjunto dos números naturais.

2.1. **Adição em $\mathbb{N}$.**

Definição 1. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, o elemento $a+b \in \mathbb{N}$ é dito soma de a com b e é definido da seguinte forma:*

(1) $a + 0 = a$

(2) $a + b^+ = (a + b)^+$.

Observe que tal definição é uma lei de recorrência.

Até o momento não adotamos símbolos para representar os números naturais. Uma primeira representação pode se dar da forma,
$\mathbb{N} = \{0, 0^+, 0^{++}, 0^{+++}, 0^{++++}, ...\}$, sendo $0^{++} = (0^+)^+$ e assim por diante.

Exemplo 1.

- $0^+ + 0 = 0^+$
- $0^+ + 0^+ = (0^+ + 0)^+ = (0^+)^+ = 0^{++}$
- $0^{++} + 0^{++} = (0^{++} + 0^+)^+ = ((0^{++} + 0)^+)^+ = ((0^{++})^+)^+ = 0^{++++}$

Veja que as idéias primitivas de Peano - zero, número e sucessor - são passíveis de infinitas interpretações diferentes, todas as quais satisfarão as cinco proposições primitivas. Por exemplo:

Exemplo 2. *Suponha que "0"significa 100 e que "número"seja tomado como significando os números de 100 em diante na série dos números naturais. Nesse caso, todas as proposições primitivas ficam atendidas, e por conseqüência 99 não é um "número"no sentido que estamos usando.*

Exemplo 3. *Na notação usual, denotamos* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$*, sendo o sucessor de 0 é 1, o sucessor de 1 é 2, o sucessor de 2 é 3 e assim por diante. O exemplo anterior teria a forma:*

- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 1 + 0^+ = (1 + 0)^+ = 1^+ = 2$
- $2 + 2 = 2 + 1^+ = (2 + 1)^+ = (2 + 0^+)^+ = ((2 + 0)^+)^+ = (2^+)^+ = 3^+ = 4$

2.1.1. *Propriedades da Adição.*

(1) Associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$.
Prova por indução sobre c.
Se $c = 0$, então $a+(b+0) = a+b = (a+b)+0$. Suponha que $a+(b+r) = (a+b)+r$, então
$(a + b) + r^+ = [(a + b) + r]^+ = [a + (b + r)]^+ = a + (b + r)^+ = a + (b + r^+)$,
portanto pela indução completa temos que $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

(2) Elemento Neutro: $a + 0 = 0 + a = a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.
Para mostrar que 0 é o elemento neutro da adição basta provar que $0 + a = a$, pois a outra igualdade é a definição. Provaremos por indução sobre a. Observe que $0 + 0 = 0$. Suponha que $0 + a = a$. Temos que, $0 + a^+ = (0 + a)^+ = a^+$. O que prova a afirmação.

(3) Comutatividade: $a + b = b + a$, para todo $a, b \in \mathbb{N}$.
A prova deste fato é feita por indução sobre b.
Para $b = 0$, temos pelo item anterior que $a + 0 = 0 + a$.
Suponha que $a + b = b + a$, observe que $a + b^+ = (a + b)^+ = (b + a)^+ = b + a^+ = b^+ + a$(prove por indução que $b + a^+ = b^+ + a$) . Concluindo a prova.

(4) Lei do Cancelamento: $b + a = c + a \Rightarrow b = c$.
Faremos a prova por indução sobre a. Para $a = 0$ a afirmação é verdadeira, pois se $b + 0 = c + 0$ então $b = c$.
Suponha que, $b + a = c + a \Rightarrow b = c$. Então,
$b + a^+ = c + a^+$ implica pela definição $(b + a)^+ = (c + a)^+$ implicando pelo axioma A_4 que $b + a = c + a$ implicando pela hipótese de indução que $b = c$.
A indução completa conclui que tal afirmação é verdadeira para todo $a \in \mathbb{N}$.

2.2. **Multiplicação em $\mathbb{N}$.**

Definição 2. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, o elemento $a \cdot b = ab \in \mathbb{N}$ é dito de produto de a com b, e é definido da seguinte forma:*

(1) $a \cdot 0 = 0$
(2) $a \cdot b^+ = a \cdot b + a$

2.2.1. *Propriedades da Multiplicação.*

(1) Associativa: $a(bc) = (ab)c$
Prova: (por indução sobre c)
Vemos que se $c = 0$, então $a(b.0) = a.0 = 0 = (ab).0$.
Suponha verdadeira para $c \in \mathbb{N}$, isto é, $a(bc) = (ab)c$.
Temos que $a(bc^+) = a(bc+b) = a(bc)+ab = (ab)c+ab = a(bc)+ab = a(bc+b) = a(cb^+)$. Mostrando que é também verdadeira para c^+. Pela indução completa a afirmação é verdadeira para todo $c \in \mathbb{N}$.

(2) Comutativa: $ab = ba$
Prova: Exercício

(3) Para todo $b \in \mathbb{N}$, $0.b = 0$.
Prova: Indução sobre b. Se $b = 0$ então $0 \cdot 0 = 0$ (definição). Suponha verdadeiro para $b \in \mathbb{N}^*$, isto é, $0 \cdot b = 0$. Assim $0 \cdot b^+ = 0 \cdot b + 0 = 0 + 0 = 0$. O que prova a afirmação para todo natural.

(4) Elemento Neutro: $a.1 = 1.a = a$
Prova: Veja que por definição $a \cdot 1 = a \cdot 0^+ = a \cdot 0 + a = 0 + a = a$. E $1 \cdot a = a$ basta usar a comutatividade da multiplicação.

(5) Distributiva: $(b + c)a = ba + ca$
Prova: Indução sobre a. Se $a = 0$, temos $(b + c) \cdot a = 0 = b \cdot 0 + c \cdot 0$. Supondo verdadeira para algum $a \in \mathbb{N}^*$, Assim $(b + c) \cdot a^+ = (b + c) \cdot a + (b + c) =$

$(ba+ca)+(b+c) = (ba+b)+(ca+c) = ba^+ + ca^+$. Portanto vale para qualquer inteiro a.

(6) Anulamento:$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0$
Prova: Exercício

2.3. **Relação de Ordem em $\mathbb{N}$.**

Definição 3. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$ diremos que a é menor ou igual a b e denotaremos por $a \leq b$, se existir $c \in \mathbb{N}$ tal que $a + c = b$.*

Exemplo 4. $5 \leq 7$ *pois tomando $c = 2$ temos que $5 + 2 = 7$.*

Proposição 7. *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração. Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e admita que S não possua um menor elemento. Vamos mostrar que S é vazio (uma contradição).

Considere o conjunto T, suplementar de S em $\mathbb{N}$. Defina o conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$ e considere a sentença

$$p(n) : I_n \subset T.$$

Como $0 \leq n$ para todo n, segue que $0 \in T$, pois, caso contrário, 0 seria um menor elemento de S. Logo, $p(0)$ é verdade.

Admita que $p(k)$ seja verdade, para algum $k \geq 0$. Se $k + 1 \in S$, como nenhum elemento de I_n está em S, teríamos que $k + 1$ é o menor elemento de S, o que não é permitido. Logo $k + 1 \in T$, seguindo daí que

$$I_{k+1} = I_k \cup \{k+1\} \cup T,$$

o que garante que, para todo $n, I_n \cup T$; portanto, $\mathbb{N} \cup T \cup N$ e, conseqüentemente, $T = N$ e $S = \emptyset$ (um absurdo).

Portanto S possui um menor elemento. □

3. Exercícios

Exercício 1. *Não existe nenhum número natural n tal que $0 < n < 1$.*

Exercício 2. *Para todo $a \in \mathbb{N}$ temos que $0 \cdot a = 0$.*

Exercício 3. *Dado um número natural n qualquer, não existe nenhum número natural m tal que $n < m < n + 1$.*

Exercício 4. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ se $a + b = 0$ então $a = b = 0$. Se $a + b = 1$ então $a = 1$ ou $b = 1$. Se $a + b = 2$ então $a = b = 1$.*

Exercício 5. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ se $a \cdot b = 1$ então $a = b = 1$. Se $a + b = 1$ então $a = 1$ ou $b = 1$. Se $a + b = 2$ então $a = b = 1$.*

Exercício 6. *A relação "menor ou igual"($\leq$) é uma relação de ordem (Reflexiva, anti-Simétrica e Transitiva) em $\mathbb{N}$.*

Exercício 7. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. $a \leq b$ se e só se $a + c \leq b + c$. $a \leq b$ se e só se $a \cdot c \leq b \cdot c$.*

Dados dois números naturais a e b com $a \leq b$, sabemos que existe um número natural c tal que $b = a + c$. Neste caso, definimos o número **b menos a**, denotado por $b - a$, como sendo o número c.

Exercício 8. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Se $a \leq b$, então $c \cdot (b - a) = c \cdot b - c \cdot a$.*

Exercício 9. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que $a - (b - c)$ esteja bem definido. Mostre que $a - (b - c) = (a + c) - b$.*

Exercício 10. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ com $0 < a < b$. Mostre que existe n tal que $na > b$. Se $a > 1$ então existe n tal que $a^n > b$*

4. Construção dos Números Inteiros

Considerando a equação $a + x = c$, para a, c números naturais e m uma incógnita, temos que no conjunto dos naturais existe solução se e só se, $c \geq a$. No entanto existem situações na prática em que necessitamos investigar a equação $a + x = c$ com $c < a$. Por exemplo, você tem em sua conta bancária 100 reais e sabe-se que amanhã será apresentado um cheque no valor de 120 reais, o resultado disso sabemos, fica-se devendo 20 reais ao banco, ou seja, fica-se com um saldo "negativo". Uma questão é, como expressar essa situação, sabendo que os números naturais não abarca tal situação. Assim precisamos de um novo conjunto numérico.

A construção dos números inteiros não será feita como a dos naturais onde foram introduzidos conceitos primitivos e axiomas. Faremos essa construção a partir dos números naturais obtidos anteriormente.

Os números inteiros devem ser construídos de tal forma a dar sentido a expressão $a - b$ para todo $a, b \in \mathbb{N}$. Para tanto associaremos a expressão $a - b$ ao par $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e nesse conjunto definiremos a seguinte relação,

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Proposição 8. *A relação $\sim$ é uma relação de equivalência,isto é,*

(1) *Reflexiva:* $(a, b) \sim (a, b)$

(2) *Simétrica:* $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$

(3) *Transitiva:* $(a, b) \sim (c, d) \quad e \quad (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

Demonstração. (1) $(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow a + b = b + a$ Comutativa da adição.

(2) $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$

(3) De $(a, b) \sim (c, d)$ temos $a + d = b + c \Leftrightarrow a + d + f = b + c + f$ (1). De $(c, d) \sim (e, f)$ temos $c + f = d + e$. Assim fazendo (2) em (1) temos:

$$a + d + f = b + (c + f) = b + (d + e) = b + d + e$$

o que acarreta que $a + f = b + e \Leftrightarrow (a, b) \sim (e, f)$.

□

Portanto essa relação define uma partição no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em classes de equivalência. Uma classe de equivalência determinada por um elemento (a, b) é denotada por $\overline{(a,b)}$ e é o conjunto,

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; (x,y) \sim (a,b)\}.$$

O conjunto de todas as classes de equivalência de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é denotado por $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ e chamado de quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pela relação $\sim$. Tal conjunto será entendido como conjunto dos números inteiros e denotado por $\mathbb{Z}$.

Exemplo 5.

(1) $\overline{(4,2)} = \{(2,0),(3,1),(4,2),...\}$
(2) $\overline{(3,5)} = \{(0,2),(1,3),(3,4),...\}$
(3) $\overline{(0,0)} = \{(0,0),(1,1),(2,2),...\}$
(4) $\overline{(1,5)} = \{(0,4),(1,5),(2,6),...\}$

Algumas dessas classes estão representadas na Figura(2), onde cada classe tem uma parte no primeiro quadrante e a outra no segundo. Lembramos que no terceiro e quarto quadrante encontram-se outras classes de equivalência da relação.

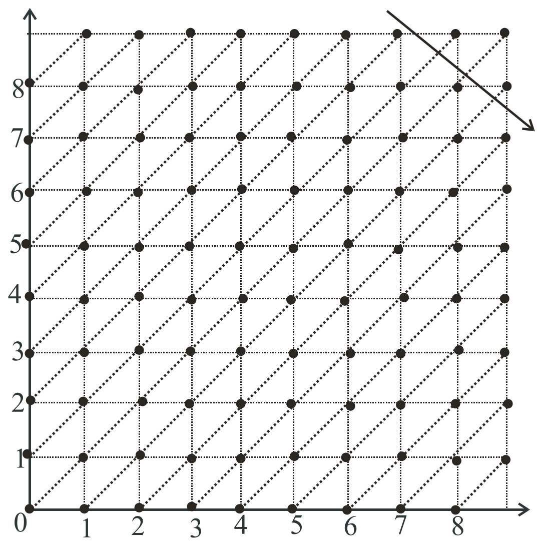


FIGURA 1. Classes de equivalência da relação $\sim$

Observando a figura associamos algumas classes aos números naturais (positivos) e outras aos números negativos, da seguinte forma:

$\overline{(1,0)} = 0$ $\quad\quad$ $\overline{(0,1)} = -1$
$\overline{(2,0)} = 2$ $\quad\quad$ $\overline{(0,2)} = -2$
$\overline{(3,0)} = 3$ $\quad\quad$ $\overline{(0,3)} = -3$
$\overline{(4,0)} = 4$ $\quad\quad$ $\overline{(0,4)} = -4$
$\vdots$ $\quad\quad$ $\vdots$
$\overline{(k,0)} = k$ $\quad\quad$ $\overline{(0,k)} = -k$
$\vdots$ $\quad\quad$ $\vdots$

Além disso a seta na figura acima já nos da uma possível ordenação dos inteiros a qual mantém a ordenação dos naturais. Para que tais idéias se consolidem, devemos agora definir as operações (adição e multiplicação) e a relação "menor ou igual" (ordem) em $\mathbb{Z}$.

Observando que gostaríamos de ter $2+(-3)=-1$, isto é,

$$\overline{(2,0)}+\overline{(0,3)}=\overline{(0,1)};$$

e também que $(-2).(-3)=6$, isto é,

$$\overline{(0,2)}.\overline{(0,3)}=\overline{(6,0)};$$

e ainda $-1\leq 1$, ou seja,

$$\overline{(0,1)}\leq\overline{(1,0)}.$$

Começamos definindo a adição em $\mathbb{Z}$.

4.1. **Adição em $\mathbb{Z}$.** Lembrando que o par (a,b) está associado a diferença $a-b$ é razoável pensar que $(a,b)+(c,d)$ é $(a-b)+(c-d)$ que pode se escrito da forma $(a+c)-(b+d)$, que por sua vez está associado ao par $(a+c,b+d)$. Isso nos motiva a seguinte definição.

Definição 4. *Dados os elementos $\overline{(a,b)},\overline{(c,d)}\in\mathbb{Z}$ chama-se soma o elemento definido por,*

$$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,c+d)}.$$

Como se trata de soma de classes de equivalência e uma mesma classe pode ser representada por diferentes elementos. Devemos mostrar que tal definição não depende dos representantes escolhidos para cada uma das classes, isto é,
se

$$\overline{(a,b)}=\overline{(a_1,b_1)}\quad\text{e}\quad\overline{(c,d)}=\overline{(c_1,d_1)}$$

então,

$$\overline{(a+c,b+d)}=\overline{(a_1+c_1,b_1+d_1)}.$$

Vejamos, temos que $(a,b)=(a_1,b_1)\Leftrightarrow a+b_1=b+a_1(1)$ e $(c,d)=(c_1,d_1)\Leftrightarrow c+d_1=d+c_1(2)$. Usando (1) e (2) em

$$(a+c)+(b_1+d_1)=(a+b_1)+(c+d_1)=(b+a_1)+(d+c_1)=(b+d)+(a_1+c_1),$$

ou $(a,b)+(c,d)=(a_1,b_1)+(c_1+d_1)$, assim demonstramos que a adição de inteiros independe do representante da classe.

4.1.1. *Propriedades da Adição em $\mathbb{Z}$.* Seja $x \in \mathbb{Z}$, então existe um par de naturais $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, sendo x uma classe de equivalência e (a,b) um representante da classe.

(1) Associativa: $x + (y+z) = (x+y)+z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
Prova: Considere $x = (a,b)$, $y = (c,d)$ e $z = (e,f)$. Assim,

$$x+(y+z) = (a,b)+[(c,d)+(e,f)] = (a,b)+(c+f,d+e) = (a+(d+e),b+(c+f)),$$

usando a associatividade nos naturais, temos,
$(a+(d+e), b+(c+f)) = ((a+d)+e, (b+c)+f) = (a+d, b+c)+(e,f) =$
$= [(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (x+y)+z$.

(2) Comutativa: $x+y = y+x$, para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.
Prova: Exercício.

(3) Elemento neutro: $x+0 = 0+x = x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, sendo $0 = \overline{(0,0)}$.
Prova: Segue diretamente da definição.

(4) Elemento simétrico (oposto): Para todo $x \in \mathbb{Z}$ existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x+y = 0$.
Prova: Veja que dado $x = (a,b)$ então $y = (-a,-b$, pois $x+y = (a,b)+(-a,-b) = (0,0) = 0$.

4.2. **Subtração em $\mathbb{Z}$.** A subtração pode ser definida a partir da adição utilizando o elemento simétrico (oposto), isto é, dados $x, y \in Z$ então $x - y = x + (-y)$.

4.3. **Multiplicação em $\mathbb{Z}$.** Lembrando novamente que (a,b) está associado a $a-b$, temos que $(a,b).(c,d)$ pode ser associado a $(a-b).(c-d)$ que é igual a $(ac+bd)-(bc+ad)$ que pode ser associado ao par $(ac+bd, bc+ad)$. Dessa forma somos levados a seguinte definição para o produto:

Definição 5. *Dados $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$ números inteiros, chamaremos de produto de x por y o elemento $x \cdot y$ definido da forma,*

$$x \cdot y = \overline{(ac+bd, ad+bc)}$$

Novamente devemos mostrar que tal definição independe do representante escolhido para a classe.

4.3.1. *Propriedades da Multiplicação em $\mathbb{Z}$.* Sejam $x = (a,b)$, $y = (c,d)$ e $z = (e,f)$ números inteiros então vale as seguintes propriedades em relação à multiplicação de inteiros:

(1) Associativa: $x.(y.z) = (x.y).z$
(2) Comutativa: $x.y = y.x$
(3) Elemento Neutro: $x.1 = 1.x = x$, sendo $1 = \overline{(1,0)}$.
(4) Lei do Anulamento do produto: $x.y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0$.
E ainda, uma propriedade que relaciona a multiplicação e a adição, a propriedade
(5) Distributiva da multiplicação em relação a adição: $x.(y+z) = x.y + x.z$

4.4. **Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$.** A ordem definida em $\mathbb{Z}$ é semelhante a ordem definida em $\mathbb{N}$ e tem o sentido mostrado na Figura (2).

Definição 6. *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, dizemos que m é menor ou igual a n, denotamos $m \leq n$, se $n = m + r$ para algum $r \in \mathbb{Z}_+$,*
onde $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \{\overline{(0,0)}, \overline{(0,1)}, \overline{(0,2)}, \overline{(0,3)}, ...\}$.

Neste caso dizemos que n é maior ou igual a m e denotamos por $n \geq m$.
Daremos mais algumas definições que serão necessária adiante.

Definição 7. *Um subconjunto de números inteiros $S \neq \emptyset$ é dito limitado superiormente se existir um número inteiro a tal que $x \leq a$ para todo $x \in S$. Se existir $a \in S$ satisfazendo a condição anterior, então a é dito máximo de S.*

Definição 8. *Um subconjunto de números inteiros $S \neq \emptyset$ é dito limitado inferiormente se existir um número inteiro a tal que $x \geq a$ para todo $x \in S$. Se existir $a \in S$ satisfazendo a condição anterior, então a é dito mínimo de S.*

Definição 9. *Um subconjunto de números inteiros é dito limitado quando é limitado superiormente e inferiormente.*

Podemos formular o seguinte teorema.

Proposição 9. *Todo subconjunto limitado e não vazio de números inteiros possui máximo e mínimo.*

Demonstração. Vamos mostrar que tal conjunto $S \cup \mathbb{Z}$ possui mínimo.
Seja $S' = \{x - k : x \in S\}$, sendo k uma cota inferior de S, que, por hipótese, existe. Notemos que $S' \neq \emptyset$, pois $S \neq \emptyset$ e que, como $k \leq x$ então $x - k \geq 0$ para todo $x \in S$, ou seja, $S' \cup N$. Logo, pelo princípio do menor número natural, S' possui mínimo, digamos $min(S') = m_0 = m - k$ para algum $m \in S$.
Mostremos que $m = min(S)$. Se $x \in S$, então $x - k \in S'$ disto temos $m - k \leq x - k$. Donde $m \leq x$, e como $m \in S$ temos que $m = min(S)$. □

O procedimento da demonstração pode ser visto no seguinte situação. Seja $S = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Neste caso, considere $k = -2$, por exemplo, então $S' = \{k - x : x \in S\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cujo mínimo é $1 = min(S') = m - (-2)$, disto temos que $m = -1 = min(S)$. (Evidente!)

5. Exercícios

Exercício 11. *Dado $a \in \mathbb{Z}$ com $a > 0$. Mostre que $a \cdot (-1) = -a$ e que $-a < 0$.*

Exercício 12. *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostre que $a \cdot (-b) = -ab$ e que $(-a) \cdot (-b) = ab$.*

Exercício 13. *Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mostre que $(a - b) \cdot (c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$ e que $(a + b) \cdot (c - d) = (ac + bc) - (ad + bd)$.*

Exercício 14. *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a \cdot b = 1$. Mostre que $a = b = 1$ ou $a = b = -1$.*

Exercício 15. *Para todo $a \in \mathbb{Z}$. Se $a^2 = a$ então $a = 0$ ou $a = 1$.*

Exercício 16. *Mostre que todo subconjunto limitado e não vazio de números inteiros possui máximo.*

Exercício 17. *Mostre que, Para todo $n \in \mathbb{Z}$, o conjunto $V = \{x \in \mathbb{Z} : n < x < n+1\}$ é vazio.*

6. Construção dos Números Racionais

Nesse momento faremos a construção do conjunto dos números racionais a partir dos números inteiros. A idéia é dar sentido a expressão $\dfrac{p}{q}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Seguindo a mesma idéia na construção dos inteiros, associaremos a expressão $\dfrac{p}{q}$ ao par $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \{x \in \mathbb{Z}; x \neq 0\}$. Definiremos nesse conjunto a seguinte relação,

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a.d = b.c$$

Proposição 10. *A relação " $\sim$ ", definida acima, é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Devemos mostrar que valem as propriedades: Reflexiva, Simétrica e Transitiva.

a) Reflexiva: $(a,b) \sim (a,b)$ pois $a.b = b.a$.
b) Simétrica: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a.d = b.c \Leftrightarrow c.b = d.a \Leftrightarrow (c,d) \sim (a,b)$.
c) Transitiva: Temos que

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a.d = b.c \Leftrightarrow a.d.f = b.c.f \tag{1}$$

$$(c,d) \sim (e,f) \Leftrightarrow c.f = d.e \Leftrightarrow b.c.f = b.d.e \tag{2}$$

De (1) e (2) temos

$$a.d.f = b.d.e \Leftrightarrow a.f = b.e \Leftrightarrow (a,b) \sim (e,f).$$

□

A relação $\sim$ determina no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ uma partição em classes de equivalência. Cada par $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ determina uma classe de equivalência indicada por $\dfrac{p}{q} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*; (x,y) \sim (p,q)\}$.

Exemplo 6.

- $\dfrac{1}{1} = \{(1,1),(2,2),(3,3),...\}$
- $\dfrac{1}{2} = \{(1,2),(2,4),(3,6),...\}$
- $\dfrac{3}{1} = \{(3,1),(6,2),(9,3),...\}$

O conjunto de todas essas classes é chamado de quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação $\sim$, denotado por $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$. Tal conjunto será designado por conjunto dos números racionais e denotado por $\mathbb{Q}$.

Graficamente essas classes são dadas por:

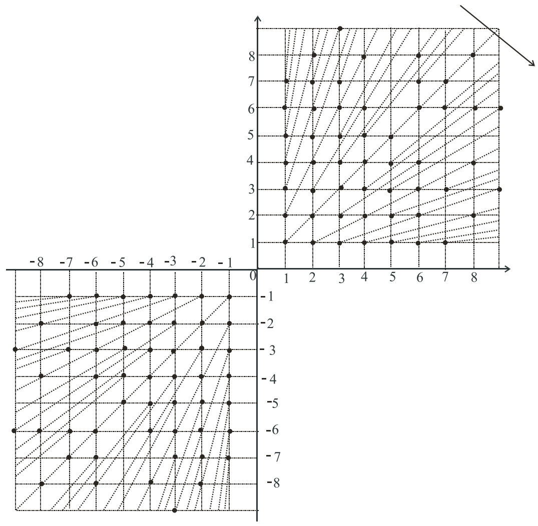


Figura 2. Classe de equivalência

Novamente temos uma possível ordenação para essas classes. Observe também que as classes de equivalência que formaram os números inteiros se mantinham a uma "distância"fixa. Enquanto que essas tem classes muito "próximas"umas das outras. Vamos, nesse momento, definir as operações e a relação de ordem de $\mathbb{Q}$

6.1. **Adição em $\mathbb{Q}$.**

Definição 10. *Sejam $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Chama-se soma de a com b e indica-se por $a+b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definido por:*

$$a + b = \frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq} = \frac{mq + np}{nq}$$

Devemos mostrar que tal definição independe dos representantes escolhidos para as classes a e b. O que é verdade, pois se $a = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ e $b = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, então

$$m.n' = n.m' \quad \text{e} \quad p.q' = q.p'$$

Multiplicando a primeira igualdade por $q.q'$ e a segunda por $n.n'$, somando membro a membro e agrupando obtemos,

$$(mq + pn)n'q' = nq(m'q' + p'n')$$

portanto,

$$\frac{mq + pn}{nq} = \frac{m'q' + p'n'}{n'q'}.$$

6.1.1. *Propriedades da Adição.*

(1) Associativa: $(a+b)+c = a+(b+c), \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$
(2) Comutativa: $a+b = b+a, \forall a,b \in \mathbb{Q}$
(3) Elemento Neutro: $a+0 = 0+a, \forall a \in \mathbb{Q}$ onde $0 = \dfrac{0}{n}, n \in \mathbb{Z}^*$
(4) Elemento Simétrico(oposto): $\forall a \in \mathbb{Q}, \exists -a \in \mathbb{Q}; \quad a+(-a) = 0$

Exercício 18. *Provar as propriedades acima.*

6.2. **Multiplicação em $\mathbb{Q}$.**

Definição 11. *Sejam $a = \dfrac{m}{n}, b = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Chama-se produto de a com b e indica-se por $a.b = ab$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definido por:*

$$ab = \frac{mp}{nq}$$

Novamente devemos mostrar que tal definição independe dos representantes escolhidos para a e b.

Sejam

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow m.n' = n.m' \tag{3}$$

e

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow p.q' = q.p' \tag{4}$$

Multiplicando (3) por (4), temos

$$(m.n').(p.q') = (n.m').(q.p') \Leftrightarrow (m.p).(n'.q') = (n.q).(m'.p') \Leftrightarrow \frac{m.p}{n.q} = \frac{m'.p'}{n'.q'}$$

Ou seja, a multiplicação de dois números racionais independe dos representantes de classe.

6.2.1. *Propriedades da Multiplicação.*

(1) Associativa: $(ab)c = a(bc), \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$
(2) Comutativa: $ab = ba, \forall a,b \in \mathbb{Q}$
(3) Elemento Neutro: $a.1 = 1.a, \forall a \in \mathbb{Q}$ onde $1 = \dfrac{n}{n}, n \in \mathbb{Z}^*$
(4) Elemento Simétrico(inverso): $\forall a \in \mathbb{Q}^*, \exists a^{-1} \in \mathbb{Q}; \quad aa^{-1} = 1$
(5) Distributiva: $a(b+c) = ab+ac, \forall a,b,c \in \mathbb{Q}$

Exercício 19. *Provar as propriedades acima.*

6.3. **Relação de Ordem em $\mathbb{Q}$.** Observe que $\forall a \in \mathbb{Q}$ podemos escolher um representante $a = \frac{p}{q}$ de tal forma que $q > 0$.

Exemplo 7.

- $\dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$

- $\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$

Definição 12. *Sejam* $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *onde* n *e* q *são estritamente positivos. Nessas condições diz-se que* a *é menor ou igual a* b *se* $mq \leq np$ *(Relação de ordem em* $\mathbb{Z}$*).*

Exemplo 8.

- $\frac{-2}{3} \leq \frac{2}{3}$, *pois* $-2.3 \leq 3.2$
- $\frac{-5}{7} \leq \frac{-2}{3}$, *pois* $-5.3 \leq 7.(-2)$

Veja na Figura (2) como as classes ficam ordenadas.

7. Existem números não Racionais

Os pitagóricos entediam que o sagrado mistério da ciência tinham o seu centro na matemática, isto é, no estudo dos números (racionais). Como relacionavam números às grandezas geométricas (segmentos) pensavam que estes se reduziam as coisas (res:realidade) à unidade e ao ponto. Assim consideravam os números como elementos de todas as coisas.

A tese pitagórica de que as coisas (res) são números, isto é, todas as coisas(res) têm um número (formado por unidades) e que sem os números nada se pode conceber ou compreender; resumidamente diziam eles, os números são a essência de todas as coisas.

O nome de Pitágoras permanece associado a uma importante relação numérica que demonstrou haver no triâgulo retâgulo: área do quadrado sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados sobre cada cateto.

No entanto, usando dois conhecimentos pitagóricos: 1) de que todas as coisas(res) podem ser expressas por um número (racional); 2) o teorema de Pitágoras. Leva-nos a uma incompatibilidade, vejamos: Considere o quadrado de lado 1(uma) unidade e aplicando o teorema de Pitágoras encontramos que sua diagonal(d) pode ser expressa pela relação $d^2 = 1^2 + 1^2$, ou seja, $d^2 = 2$.

Surge então no interior da comunidade pitagórica a pergunta: qual número (racional) cujo quadrado é 2? Este problema, aparentemente, foi resolvido pelos pitagóricos, para o desespero da comunidade.

Para resolvermos o problema: existe um número racional $\frac{p}{q}$ cujo quadrado é 2? Utilizaremos o método "redução ao absurdo" que consiste em admitir que tal solução exista e analisar as conseqüências de tal afirmação.

Admita que exista um número racional $\frac{p}{q}$, irredutível cujo quadrado é 2, isto é, $(\frac{p}{q})^2 = 2$ assim $p^2 = 2q^2$ o que podemos concluir que p^2 é par e equivalentemente p é par, assim podemos escrever $p = 2k$, para algum inteiro k. Substituindo p por $2k$ obtemos $4k^2 = 2q^2$, simplificando a equação obtemos $2k^2 = q^2$. Assim obtemos, novamente, que q^2 é par e por conseqüência q é par. Contrariando nossa hipótese de que o número racional $\frac{p}{q}$ seja irredutível, assim somos obrigados a concluir que não existe um número racional cujo quadrado seja 2. Esta foi uma das primeiras crises(fraqueza) da comunidade pitagórica.

Outro fato que revelou mais uma crise(fraqueza) na comunidade pitagórica foi a teoria da existência da menor grandeza geométrica (mônada) e que toda grandeza geométrica era formada por uma quantidade ilimitada de mônodas. A aceitação de tal fato levanos à um absurdo, a não explicação racional do movimento, fato observado por Zenão de Eléia.

Exercício 20.
(1) *Mostre que* $\sqrt{3}$ *não é racional.*
(2) *Mostre que* $\sqrt{p}$ *não é racional, sendo* p *primo.*
(3) *Mostre que* $\log 2$ *não é racional.*

7.1. **Como obter exemplos de números não-racionais.** Apresentaremos uma maneira de se obter números irracionais (não-racionais) a partir do seguinte teorema:

Teorema 1. *Considere a equação polinomial com coeficientes inteiros*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \tag{5}$$

Se esta equação possuir uma raiz racional irredutível $\frac{p}{q}$*. Então* p *é divisor de* a_0 *e* q *divisor de* a_n*.*

Demonstração. Seja $\frac{p}{q}$ irredutível e raiz de (5), então,

$$a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + ... + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0. \tag{6}$$

Multiplicando ambos os membros dessa equação por q^n, obtemos,

$$a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0, \tag{7}$$

que pode ser escrita da forma

$$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_1 q^{n-1}). \tag{8}$$

Portanto p é divisor de $a_0 q^n$. Mas p não é um divisor de q^n. Então p é divisor de a_0.

De maneira análoga, podemos escrever a equação (7) da forma

$$a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}). \tag{9}$$

Portanto q é divisor de $a_n p^n$. Como q não é divisor de p^n. Concluímos que q é divisor de a_n. Completando a demonstração.

Com esse teorema podemos demonstrar a irracionalidade de vários números.

Exemplo 9. *O número* $\sqrt{2}$ *é irracional.*
Solução: $\sqrt{2}$ *é raiz da equação*

$$x^2 - 2 = 0. \tag{10}$$

Observe que se tal equação polinomial tiver uma raiz racional irredutível $\frac{p}{q}$*, teremos que* p *é divisor de* 2 *e* q *é divisor de* 1*. Portanto as possibilidades são* $p = 1, -1, 2, -2$ *e* $q = 1, -1$*. Concluímos que as possíveis raízes são* $1, -1, 2 \quad e \quad -2$*. Mas essas não são raízes da equação (10), como se pode verificar diretamente; as igualdades*

$$1^2 - 2 = 0, \quad (-1)^2 - 2 = 0, \quad 2^2 - 2 = 0, \quad (-2)^2 - 2 = 0$$

são todas falsas.
Portanto a equação 10 não possui raiz racional, de modo que $\sqrt{2}$ *é um número irracional.*

Exemplo 10. *O número* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *é irracional.*
Solução: *Construiremos um polinômio que tem tal número como raiz e mostraremos que tal polinômio não tem raiz racional usando o Teorema* (1). *Fazendo*

$$x = \sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$x^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3,$$

reorganizando os termos, temos

$$x^2 - 5 = 2\sqrt{6}.$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$x^4 - 10x^2 + 25 = 24,$$

ou

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0. \tag{11}$$

A equação 11 foi construída de tal forma que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *é uma de suas raízes. Aplicando o Teorema 1, concluímos que a equação* (11) *não tem raízes racionais, portanto* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *é irracional.*

Exercício 21.

(1) *Provar que se* p *é primo então* $\sqrt{p}$ *é irracional.*
(2) *Verifique se* $\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ *é ou não irracional.*

Exemplo 11. *Surpreendentemente o número* $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ *é racional.*
Solução *Fazendo* $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$. *Elevando ao cubo ambos os membros e fazendo as algumas simplificações teremos,*

$$-3(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}) = x^3 - 4$$

isto é,

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

portanto o número $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ *é uma raiz real da equação polinomial acima. Mas tal equação polinomial pode ser escrita da forma*
$(x-1)(x^2+x+4) = 0$ *cuja única raiz real é* $x = 1$. *Concluímos que,*

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 1$$

e portanto racional.

Exercício 22.

(1) *Mostre que se a e b são números racionais, então o número* $\frac{1}{2}(a+b)$ *é racional e está entre a e b.*
(2) *Prove que entre dois números racionais existem infinitos números racionais.*
(3) *Prove que não existe número racional q cujo quadrado seja igual a p, sendo p primo.*
(4) *(Vestibular UFG/2003) Demonstre que* $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ *é um inteiro múltiplo de 4.*

Os números que são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros são chamado de números algébricos. Portanto os números irracionais obtidos anteriormente são algébricos. Liouville, em 1851, estabeleceu a existência de números irracionais não algébricos. Tais números são chamados de transcendentes. Exemplos desse números são $2^{\sqrt{2}}$, π, $\log 2$ e $\Sigma_{n=0}^{\infty}10^{n!}$. O último é conhecido como número de Liouville e a demonstração de que se trata de um número transcendente pode ser encontrada em [2].

Podemos dividir os reais em:

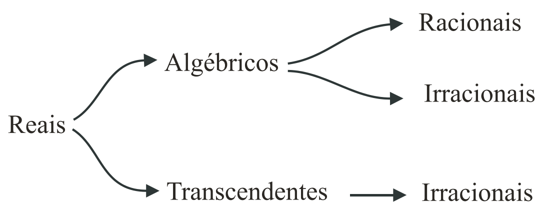


Figura 3

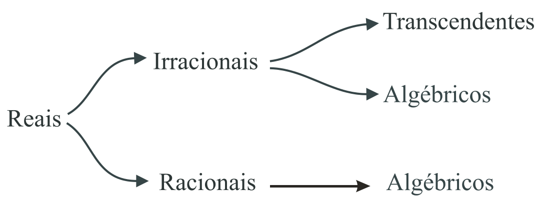


Figura 4

7.2. **Representação decimal dos racionais.** Outro modo de obtermos exemplos de números não-racionais é observar a representação decimal de um número racional. Provando que a representação decimal de um número racional é finita ou é uma dízima periódica (veja [4]) e admitindo que toda dízima representa um número. Temos uma fábrica de exemplos de números não-racionais. Vejamos alguns;

1): 0,01001000100001...
2): 0,12345678910111213114...
3): 0,10110111011110...

8. Conjuntos Limitados

No conjunto dos números racionais subconjuntos limitados podem não ter máximo e ou mínimo, veja os exemplos.

Exemplo 12.

(1) $S_1 = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$ *não possui mínimo.*
(2) $S_2 = \{\frac{(-1)^n}{n+1} n; n \in \mathbb{N}\}$ *não possui máximo nem mínimo.*
(3) $S_3 = \{(1 - \frac{1}{n})^n; n \in \mathbb{N}^*\}$ *não possui máximo.*
(4) $S_4 = \{a_0 = 2, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}}); n \in \mathbb{N}\}$ *não possui mínimo.*

Definiremos o que vem a ser ínfimo e supremo de um conjunto.

Definição 13. *Seja $S \subset \mathbb{Q}$ com $S \neq \emptyset$. Dizemos que λ é uma cota superior de S se $\lambda \geq x, \forall x \in S$ e nesse caso S é limitado superiormente. A menor das cotas superiores, caso exista, é dita supremo do conjunto S.*

Definição 14. *Seja $S \subset \mathbb{Q}$ com $S \neq \emptyset$. Dizemos que λ é uma cota inferior de S se $\lambda \leq x, \forall x \in S$ e nesse caso S é limitado inferiormente. A maior das cotas inferiores, caso exista, é dita ínfimo do conjunto S.*

Surge então as seguintes questões. Todo conjunto limitado inferiormente possui ínfimo? Todo conjunto limitado superiormente possui supremo? No conjunto dos números racionais a resposta para tais perguntas é não. Pois para certos conjuntos como S_4 acima o ínfimo é um número que tem o quadrado igual a 3, e já vimos que esse número não é racional. Tal problema é resolvido quando se constrói o conjunto dos números reais, que faremos agora.

9. NÚMEROS REAIS

Na construção dos números Reais, seguiremos o processo de Dedekind. A preocupação de Dedekind com o problema dos números irracionais, e por conseqüência com a continuidade, começou em 1858 quando ministrava aulas de cálculo. Até então no conceito de limite usava como guia apenas a geometria, Dedekind achava que tal estudo deveria ser desenvolvido através do uso da aritmética, desejava que fosse rigoroso. O que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais? Sua preocupação era com a obtenção de uma definição para a "essência da continuidade".

Leibniz achava que a "continuidade" de pontos sobre uma reta era consequência da sua densidade, isto é, do fato que entre dois pontos quaisquer sempre existe um terceiro. Porém os números racionais têm esta propriedade, no entanto não formam um "continuum".

Dedekind buscou inspiração para sua definição de continuidade na reta, melhor exemplo de contínuo para ele. Observou que cada ponto da reta determina uma decomposição da mesma em duas partes de tal natureza que todo ponto de uma delas está a esquerda (precede) de todo o ponto da outra. A correspondência entre decomposição em duas partes com tais propriedades e o ponto de separação levou Dedekind a dar a seguinte definição para números reais:

Definição 15. *Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{Q}$, com $A \cup B = \mathbb{Q}$ e tais que todo elemento de A é menor (precede) que todo elemento de B. Nessas condições o par (A, B) é denominado número real.*

Assim como os números inteiros foram definidos como pares de naturais, os racionais como pares de inteiros, teremos os reais como pares de conjuntos. Vejamos alguns exemplos;

Exercício 23.

(1) $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq 3\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > 3\}$.
(2) $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq \frac{1}{3}\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \frac{1}{3}\}$
(3) $A = \{x \in \mathbb{Q}_+; x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_-$ *e* $B = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 > 2\}$

Os primeiros dois exemplos mostram que temos uma cópia dos racionais contida nos reais, pois cada racional determinar um corte, isto é, um número real. Porém temos corte que não são determinados por racionais, como é o caso do terceiro exemplo. Esses novos números são os irracionais.

9.1. **Cortes: Propriedades.** Após a definição, levada pela intuição de continuidade, faz-se necessário um estudo desse novo conjunto, nos mesmo termos que foram estudados os conjuntos anteriores.

Teorema 2. *Em um corte (A, B) não podemos ter, simultaneamente, um maior elemento em A e um menor elemento em B.*

Demonstração. Suponha que isso ocorra. Seja a o maior elemento de A, e b o menor elemento de B. Então, pela definição de corte $a < b$. Nesse caso o número racional $\frac{1}{2}(a + b)$ é maior que qualquer elemento de A e menor que qualquer elemento de B, e $\frac{1}{2}(a + b)$ não pertence a A e nem a B contrariando a definição de corte. Concluindo que o máximo de A e o mínimo de B não podem ocorrer simultaneamente. □

Por outro lado podemos ter máximo ou mínimo em um dos conjuntos. Como, num corte (A, B), o máximo de A, caso exista, é o elemento que colocado em B será seu mínimo. Identificaremos os corte em que apenas esse elemento tenha sido transferido de um conjunto para o outro. Desta forma o corte $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > 3\}$ determina o mesmo número que o corte $C = \{x \in \mathbb{Q}; x < 3\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 3\}$. Nesse texto, para evitar delongas com casos particulares, sempre que o elemento de separação de (A, B) for um número racional o incluiremos em A.

Definição 16. *Diremos que o número real (A, B) é menor ou igual ao número real (C, D) se, e somente se, $A \subset C$. Denotaremos por $(A, B) \leq (C, D)$*

Exemplo 13. *Seja (A, B) dado por $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq \frac{2}{3}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \frac{2}{3}\}$ e (C, D) dado por $C = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq \frac{5}{2}\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Q}; x > \frac{5}{2}\}$. Neste, como $A \subset C$, temos que $(A, B) \leq (C, D)$.*

Definiremos a soma e o produto de dois conjuntos da seguinte forma;

$A + B = \{x + y; x \in A \quad e \quad y \in B\}$

$A.B = \{x.y; x \in A \quad e \quad y \in B\}$

$-A = \{-x; x \in A\}$

O objetivo agora é definir as operações no conjunto dos números reais. Iniciaremos pela soma.

Definição 17. *Sejam (A,B) e (C,D) números reais, sua soma é o número real $(A+C, B+D)$ que é denotado por $(A,B)+(C,D)$.*

O par $(A+C, B+D)$ é um número real, pois todo elemento de $A+C$ precede todos os elementos de $B+D$. Além disso $A+C$ e $B+D$ são conjuntos não vazios com a propriedade $(A+C)\cap(B+D)=\emptyset$ e $(A+C)\cup(B+D)=\mathbb{Q}$. Prove essas afirmações (Use o fato $A\subset C$ ou $C\subset A$).

Exercício 24.

(1) *Mostre que o número real $(\mathbb{Q}_-, \mathbb{Q}_+^*)$ é o elemento neutro da adição.*
(2) *Mostre que o número $-(A,B)=(-B,-A)$ é o oposto de (A,B).*
(3) *Prove que a adição é comutativa e associativa.*

Diremos que um número real (A,B) é positivo se $(\mathbb{Q}_-, \mathbb{Q}_+^*) < (A,B)$. Será chamado de número negativo se $(A,B) < (\mathbb{Q}_-, \mathbb{Q}_+^*)$.

Definição 18. *Dados (A,B) e (C,D) números reais positivos. Seu produto é o número real $((B.D)^c, B.D)$ denotado por $(A,B).(C,D)$.*

Exercício 25.

(1) *Defina, a partir do caso anterior, como deve ser o produto de números reais em que pelo menos um não é positivo.*
(2) *Mostre que o número real (A,B), dado por $A=\{x\in\mathbb{Q}; x\leq 1\}$ e $B=A^c$ é o elemento neutro da multiplicação.*
(3) *Prove que a multiplicação é comutativa e associativa.*

A principal questão que a formalização dos números reais pretende responder é a de que todo conjunto não vazio e limitado de números reais possui ínfimo e supremo. O teorema a seguir garante esse resultado.

Teorema 3. *Todo subconjunto não vazio e limitado de números reais possui supremo e ínfimo.*

Demonstração. Seja $\{(A_i,B_i)\}$, $i\in I$, um conjunto limitado e não vazio de números reais. Então os números reais $(\cup A_i, (\cup A_i)^c)$ e $((\cup B_i)^c, \cup B_i)$ são supremo e ínfimo respectivamente. Inicialmente devemos provar que se trata de números reais. Temos que $\cup A_i\neq\emptyset$, pois é a união de conjuntos não vazios. Sendo o conjunto $\{(A_i,B_i)\}$ limitado, existe (C,D) tal que $(A_i,B_i)\leq(C,D)$ para todo $i\in I$, isso mostra que $\cup A_i\neq\mathbb{Q}$. Além disso a união de $\cup A_i$ com $(\cup A_i)^c$ é o conjunto de todos os racionais. Dado $x\in\cup A_i$ e $y\in(\cup A_i)^c=\cap A_i^c=\cap B_i$. Temos que $x\in A_j$ para algum j e $y\in B_j$, o que mostra que x precede y. Concluímos que $(\cup A_i, (\cup A_i)^c)$ é um corte. É uma cota superior do conjunto $\{(A_i,B_i)\}$ pois $A_n\subset\cup A_i$. E, sendo (C,D) outra cota superior, temos que $A_i\subset C$ para todo $i\in I$, logo $\cup A_i\subset C$, ou $(\cup A_i,(\cup A_i)^c)\leq(C,D)$. Isso mostra que $(\cup A_i,(\cup A_i)^c)$ é o supremo do conjunto. De forma análoga podemos mostrar que $((\cup B_i)^c,\cup B_i)$ é o ínfimo do conjunto. □

O conjunto A^c é o complementar de A em Q.

Esse resultado nos permite provar que se uma seqüencia de números reais é monótona e limitada então converge para um número real. Isso é o que da sentido a qualquer dízima, como aquelas que comentamos quando falamos da representação decimal de um número racional.

Referências

[1] Domingues, Hygino H. *Fundamentos de Aritimética.* Atual, São Paulo, 1991.

[2] Nivem, Ivan. *Números: Racionais e Irracionais.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM-IMPA.

[3] Pieterzack, Maurício D. *Números Reais.* In: Revista da Olimpíada do Estado de Goiás. no. 1, 2000.

[4] Ávila, Geraldo S. *Análise Matemática para licenciatura.* Edgard Blücher Ltda, 3a. edição,SP, 2006.

[5] Barker, Stepher F. *Filosofia da Matemática.* Tradução de Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota, Zahar, 1964.

[6] Dantzig, Tobias. *Número: A Linguagem da Ciência.* Tradução de Sérgio Goes de Paula. Zahar Editores. Rio de Janeiro. 1970.

[7] Ifrah, Georges. *Os Números: A história de uma grande invenção.* Ed. Globo.

[8] Russell, Bertrand. *Introdução à Filosofia Matemática.* Tradução de Maria L. X. de A. Borges. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editora, 2007.

[9] Silva, Valdir Vilmar. *Números: Construções e Propriedades.* Cegraf- UFG. Goiânia-Go. 2003.

[10] Caraça, Bento Jesus. *Conceitos Fundamentais de Matemática.* Lisboa-Portugal. 1958.

Prof. Ms. Eudes Antonio da Costa
UFT - Campus de Arraias
e-mail: eudes@uft.br
Prof. Ms. Ronaldo Antonio Santos
UFT - Campus Rialma
e-mail: rasantos@mat.ufg.br