UFG XXIII Semana do IME
Universidade Federal de Goiás

Goiânia, 07 a 10 de outubro

Mini Curso

O Produto Entrelaçado e Automorfismos de Árvores

Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro - UFG/Catalão

O PRODUTO ENTRELAÇADO E AUTOMORFISMOS DE ÁRVORES

RIBEIRO, M. R. R.

1. INTRODUÇÃO

O produto entrelaçado (wreath) é uma ferramenta poderosa para a obtenção de exemplos de importantes resultados em teoria de grupos. Ele aparece de maneira natural em determinados contextos, como por exemplo na estrutura dos subgrupos de Sylow de grupos simétricos que envolve o resultado de L. Kaloujnine [1], além do famoso Teorema da Imersão de produto entrelaçado [3], que garante que a extensão de um grupo A por um grupo B pode ser imerso no produto entrelaçado de A por B.

O grupo de automorfismos de árvores regulares uni-raiz pode ser representado como um produto entrelaçado. Este grupo tomou notoriedade quando certos exemplos de subgrupos com as propriedades: finitamente gerado, periódico e infinito, foram construídos dentro dele. A partir de então, tem sido crescente o interesse pelo estudo desses grupos. Muitos fatos sobre sua estrutura tem sido esclarecidos e outros exemplos inéditos de grupos satisfazendo certas propriedades específicas foram definidos.

Neste minicurso faremos um estudo introdutório sobre o produto entrelaçado de grupos e apresentaremos o grupo de automorfismos de árvores a partir deste estudo. O objetivo principal é apresentar o produto entrelaçado restrito e permutacional, e observar o grupo de automorfismo de árvores como um produto entrelaçado, propondo uma visualização geométrica possibilitada pelo grafo da árvore.

2. CONCEITOS BÁSICOS

Nesta seção são introduzidos alguns conceitos básicos da teoria de grupos e algumas propriedades são apresentadas.

2.1. Ação de Grupos.

Definição 2.1. *Se X é um conjunto não vazio, um subgrupo G do grupo simétrico S_X $(Sym(X))$ é chamado um grupo de permutação de X.*

Dois elementos x e y de X são G-equivalentes se existe uma permutação π em G tal que $x\pi = y$. Esta é uma relação de equivalência em X. As classes de equivalência são conhecidas como G-órbitas; a órbita contendo x é $xG = \{x\pi | \pi \in G\}$. G é **transitivo** se dados $x, y \in X$ existe $\pi \in G$ tal que $x\pi = y$. Segue que G é transitivo se, e somente se existe exatamente uma G-órbita.

Se $Y \subset X$, o **estabilizador** de Y em G, $St_G(Y)$ ou G_Y é o conjunto das permutações em G que deixam fixos todos os elementos de Y.

Definição 2.2. *Seja G um grupo e X um conjunto não vazio. Por uma* **ação à direita** *de G em X entendemos uma função $\varphi : X \times G \longrightarrow X$ tal que*

$$(x, g_1 g_2)\varphi = ((x, g_1)\varphi, g_2)\varphi, \quad (x, e)\varphi = x.$$

Assim, para $g \in G$ fixo a aplicação $\varphi_g : X \longrightarrow X$, $x \mapsto xg$ é uma permutação de X e, portanto, a ação de grupo determina um homomorfismo $\theta : G \longrightarrow S_X$, $g \mapsto \varphi_g$. Reciprocamente, se $\theta : G \longrightarrow S_X$ é um homomorfismo (uma tal função é denominada uma representação por permutação de G em X), então a aplicação

$$\varphi : X \times G \longrightarrow X, \ (x, g) \mapsto (x)\varphi_g.$$

é uma ação à direita de X. A representação por permutação de G em X, $\theta : G \longrightarrow S_X$ é fiel se $Ker(\theta) = \{e\}$, i.e., G é isomorfo a um grupo de permutação de X.

2.2. **Produto Semi-direto.**

Definição 2.3. *Um grupo G é o produto semi-direto de seus subgrupos K e H se:*
(i) $K \lhd G$;
(ii) $G = KH$;
(iii) $K \cap H = e$

Denotamos $G = K \rtimes H$. Notamos que todo produto direto é também semi-direto.

Exemplo 2.4. *O grupo simétrico S_n, $n \geq 3$, é um produto semi-direto do grupo das permutações pares A_n pelo grupo cíclico de ordem dois C_2, escrevemos $S_n = A_n \rtimes C_2$.*

Considere grupos arbitrários H e K, com H agindo sobre K via ψ, isto é,

$$\psi : H \longrightarrow Aut(K), h \mapsto (\psi_h : k \mapsto k^h).$$

Seja $G = \{(k, h) \mid k \in K, \ h \in H\}$ e definamos a operação:

$$(k, h)(k_1, h_1) = (kk_1^h, hh_1)$$

onde $k, \ k_1 \in K$ e $h, \ h_1 \in H$.

Podemos verificar que G é um grupo e além disso temos que $K_1 = \{(k, e) \mid k \in K\}$ e $H_1 = \{(e, h) \mid h \in H\}$ são subgrupos de G tais que $K_1 \lhd G$, $K_1 \cap H_1 = \{e\}$ e $G = K_1 H_1$. Assim G é o produto semi-direto de $K_1 \cong K$ por $H_1 \cong H$. Dizemos também que G é o **produto direto externo** de K por H induzido por ψ e denotamos por $G = K \rtimes_\psi H$ ou simplesmente por $G = K \rtimes H$.

3. O PRODUTO ENTRELAÇADO PERMUTACIONAL E REGULAR

Sejam (A, X) e (B, Y) grupos de permutações, onde o grupo A age sobre o conjunto X e o grupo B sobre y. Denote por Z o produto cartesiano $X \times Y$. Denotaremos:

- A^Y: produto direto irrestrito (ou cartesiano) de cópias de A indexadas por Y;

- $A^{(Y)}$: produto direto restrito (ou produto direto) de cópias de A indexados por Y.

Cada elemento de A^Y será visto como uma função $f : Y \longrightarrow A$. Podemos também vê-lo como um vetor ou uma sequência. Além disso, o elemento $f \in A^Y$ tal que $f(y) = a$ e $f(y') = e$, $\forall \ y \neq y' \in Y$ será algumas vezes escrito como a_y. Em termos de sequência, ou de vetor isto significa que $f = (e, \cdots, e, a, e, \cdots) = a_y$, onde o elemento a ocupa a y-ésima coordenada.

- A^Y é o grupo das funções $f : Y \longrightarrow A$ com a multiplicação usual: $(f.g)(y) = f(y).g(y)$, $\forall f,\ g \in A^Y$.

- Seja $f \in A^Y$. O **suporte** de f é o conjunto $s(f) = \{y \in Y \mid f(y) \neq e\}$.

- $A^{(Y)}$ é o subgrupo de A^Y, onde $f \in A^{(Y)}$ se $f \in A^Y$ e f tem suporte finito.

Definimos uma ação de B em A^Y por

$$\psi : B \times A^Y \longrightarrow A^Y,\ (b, f) \mapsto f^b,$$

onde $f^b : Y \longrightarrow A$, $f^b(y) = f(yb^{-1}),\ \forall y \in Y$.

Podemos interpretar $f(y)$ como um termo da sequência f que se encontra na posição y. Então $f^b(y) = f(yb^{-1})$ é um termo da sequência f^b que se encontra na posição y. Segue que f^b é uma sequência obtida da sequência f permutando suas coordenadas.

Segue do fato de ψ ser ação que, para cada $b \in B$, $\psi_b : A^Y \longrightarrow A^Y,\ f \mapsto f^b$ é uma permutação de A^Y. Temos que

$$\Psi : B \longrightarrow S_{(A^Y)},\ b \mapsto \psi_b,$$

é um homomorfismo. Mais ainda ψ_b é isomorfismo. Segue que ψ_b é automorfismo, para cada $b \in B$. Agora, Ψ pode ser escrita da seguinte forma

$$\Psi : B \longrightarrow Aut(A^Y).$$

Além disso Ψ é injetora (se $A \neq e$). Portanto, B pode ser considerado como um grupo de automorfismos de A^Y.

Estamos aptos a definir o produto semi-direto G de A^Y por B:

$$G = A^Y \rtimes_\Psi B,$$

aqui consideramos a operação

$$(f_1, b_1).(f_2, b_2) = (f_1 f_2^{b_1^{-1}}, b_1 b_2).$$

O produto semi-direto G definido age em $Z = X \times Y$.

3.1. **Definição de Produto Entrelaçado.** Com a mesma notação acima, vamos definir o produto entrelaçado de grupos.

Definição 3.1. *Sejam (A, X) e (B, Y) dois grupos de permutações, definimos o* **produto entrelaçado permutacional** *$AWr_Y B$ de A por B como o produto semi-direto de $A^Y \rtimes_\Psi B$.*

O **produto entrelaçado restrito** $Awr_Y B$ de A e B, é definido de maneira análoga: $Awr_Y B = A^{(Y)} \rtimes_\Psi B$. O grupo A^Y ($A^{(Y)}$) em $AWr_Y B$ ($Awr_Y B$) é denominado **grupo base**. Existem duas imersões do grupo A no grupo base A^Y que serão de interesse:

- imersão diagonal: $\tau : A \longrightarrow A^Y$, $a \mapsto f_a$, onde $f_a(y) = a,\ \forall y \in Y$;

- imersão em componentes: fixe $y \in Y$ e considere $\psi : A \longrightarrow A^Y$, $a \mapsto f_a$, onde $f_a(y) = a$ e $f(y') = e,\ \forall y \neq y', y' \in Y$.

Note que um grupo age sobre si mesmo por multiplicação à direita. Esta ação produz uma representação por permutação de G em G: $\psi : G \longrightarrow S_G$ denominada **representação regular à direita**.

Definição 3.2. *Sejam A e B dois grupos considerados como grupos de permutações em suas representações regulares (i.e. A e B agem fielmente sobre si mesmos). O* **produto entrelaçado regular** *de A por B é o produto entrelaçado $AWr_BB(Awr_BB)$, geralmente denotado por $AWrB$ $(AwrB)$.*

Apresentamos a seguir dois exemplos de produto entrelaçado regular.

Exemplo 3.3. *C_2wrC_2 é isomorfo ao grupo diedral D_8. De fato considere $C_2wrC_2 = AwrB$ onde $A = \langle x\rangle$ e $B = \langle y\rangle$. Então temos $A^B = \langle x\rangle\times\langle x\rangle = \{(e,e),(e,x),(x,e),(x,x)\} = \{(a_1,a_y) \mid a_1,\ a_y \in \langle x\rangle\}$. A ação de $\langle x\rangle^{\langle y\rangle}$, permuta as coordenadas, por exemplo*

$$(a_1,a_y)^y = (a_y,a_1).$$

Assim, $C_2wrC_2 = (\langle x\rangle \times \langle x\rangle) \rtimes \langle y\rangle = \{((e,e),e),((e,e),y),((e,x),e),$ $((e,x),y),((x,e),e),((x,e),y),((x,x),e),((x,x),y)\}$.

Note que:

- *(i) $a = ((e,e),y)$ tem ordem dois.*
- *(ii) $b = ((e,x),y)$ tem ordem quatro.*
- *(iii) $abab = e$.*
- *(iv) C_2wrC_2 tem ordem oito.*

Segue de (i) a (iv) que C_2wrC_2 é isomorfo ao grupo $D_8 = \langle a,\ b \mid a^2 = b^4 = (ab)^2 = e\rangle$.

Exemplo 3.4. *$\mathbb{Z}wr\mathbb{Z}$ é um grupo com dois geradores que possui um subgrupo que não é finitamente gerado. De fato, Considere $\mathbb{Z}_{(i)}$ a projeção de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})}$ na coordenada i,*

$$\mathbb{Z}_{(i)} = \langle f_i \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})} \mid f_i(j) = \delta_{ij}\rangle$$

onde,

$$\delta_{ij} = 1,\ se\ i = j\ \text{e}\ \delta_{ij} = 0,\ se\ i \neq j$$

Segue que $\mathbb{Z}_{(i)} = \langle(\cdots,0,1,0\cdots)\rangle \cong \mathbb{Z}$ onde 1 ocupa a i-ésima coordenada e $\mathbb{Z}_{(i)} \leq \mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})}$. Observamos ainda que

$$\mathbb{Z}wr\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})} \rtimes \mathbb{Z} = \langle\mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})},\mathbb{Z}\rangle = \langle\mathbb{Z}_{(i)},\mathbb{Z} \mid i \in \mathbb{Z}\rangle = \langle\mathbb{Z}_{(i)},\mathbb{Z}\rangle.$$

Temos a ação $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})}$, $(n,f) \mapsto f^n$; $f_i^n(z) = f(z-n)$, e $\mathbb{Z}$ age transladando em n coordenadas a f. Em particular, $\mathbb{Z}$ age em $\mathbb{Z}_{(i)}$:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{(i)} \longrightarrow \mathbb{Z}_{(i)},\ (n,f_i) \mapsto f_i^n;$$

onde $f_i^n(j) = f_i(j-n)$.

Observamos que se $f_i \in \mathbb{Z}_{(i)}$, $f_i(j) = \delta_{ij}$. Para $n \in \mathbb{Z}$, $f_i^n(j) = f_i(j-n) = \delta_{i(j-n)}$, logo, $f_i^n(i+n) = f_i(i) = 1$. Assim, se o valor 1 ocupa a coordenada i da f, então o

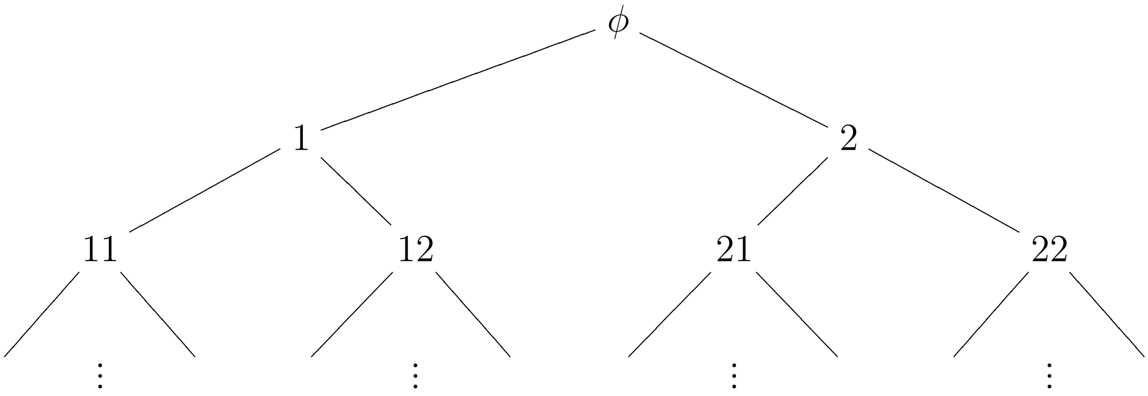

FIGURA 1. árvore binária $\mathcal{T}_2$

valor 1 *ocupará a coordenada* $i+n$ *da* f^n. *Isto mostra que a ação de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}_{(i)}$ *é a de transladar* n *coordenadas o elemento* 1. *Assim,* $f_i^n = f_{i+n}$.

Observamos ainda que o grupo base $\mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{(i)}$ *é um subgrupo de* $\mathbb{Z}wr\mathbb{Z}$ *(visto como* $\mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})} \rtimes \{0\}$*) que é infinitamente gerado pois a soma direta dos* $\mathbb{Z}_{(i)}$, $i \in \mathbb{Z}$, *é abeliano livre de posto infinito.*

Agora, vamos mostrar que $\mathbb{Z}wr\mathbb{Z}$ *é 2-gerado, mais especificamente, para* $i \in \mathbb{Z}$, i *fixo, temos*

$$\mathbb{Z}wr\mathbb{Z} = \langle (f_i, 0), (0, 1)\rangle$$

onde $f_i \in \mathbb{Z}_{(i)}$, $i \in \mathbb{Z}$. *De fato, para* $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}(f_i,0)^{(0,k)} &= (0,-k)(f_i,0)(0,k)\\ &= (0+f_i^k, -k+0).(0,k)\\ &= (f_i^k, -k+k)\\ &= (f_{i+k}, 0)\end{aligned}$$

Isto mostra que $(f_i, 0)$ *e* $(0, 1)$ *geram os elementos* $(f_j, 0) \in \mathbb{Z}wr\mathbb{Z}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Segue que $\mathbb{Z}_{(i+k)} \hookrightarrow \langle (f_i, 0), (0, 1)\rangle$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f_{i+k} \hookrightarrow (f_{i+k}, 0)$ *e* $\mathbb{Z} \hookrightarrow \langle (f_i, 0), (0, 1)\rangle$, $z \hookrightarrow (0, z)$.

Assim,

$$\mathbb{Z}wr\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}_{(i)}, \mathbb{Z} \mid i \in \mathbb{Z}\rangle \le \langle (f_i, 0), (0, 1)\rangle \le \mathbb{Z}wr\mathbb{Z}.$$

Na verdade $\mathbb{Z}wr\mathbb{Z}$ não é finitamente apresentado, veja [5].

4. ÁRVORES REGULARES

Seja Y um conjunto que chamaremos *alfabeto*. Por $M = M(Y)$ denotamos o conjunto

$$\{y_1y_2\cdots y_n \mid y_i \in Y\}$$

de todas as palavras finitas sobre o alfabeto Y, incluindo a palavra vazia ϕ. Em outros termos, M é o monóide livre gerado por Y. Seja $\mathcal{T}_Y$ o grafo cujo conjunto de vértices é M e tal que dois vértices são conectados se, e somente se eles são da forma v e vy, onde $v \in M$ e $y \in Y$. O grafo $\mathcal{T}_Y$ é uma árvore que chamaremos *árvore regular uni-raiz* ou simplesmente *árvore regular*, onde a palavra vazia é a raiz. Quando $|Y| = n$, escreveremos $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_n$. Para $Y = \{1, 2\}$ temos a árvore binária $\mathcal{T}_2$, veja figura 1.

Definindo sobre M uma relação de ordem $\leq$ dada por:

$$v \leq u \Longleftrightarrow u \text{ é prefixo de } v,$$

temos que a árvore $\mathcal{T}_Y$ é o grafo de $(M, \leq)$.

O comprimento de uma palavra $v \in M$ (o número de letras dela) é denotado por $|v|$, onde $|\phi| = 0$. A *função comprimento* $|\ \ | : v \mapsto |v|$ induz uma distância entre os elementos de M dada por:

$$d(u, v) = |u| + |v| - 2|w|,$$

onde w é o maior prefixo comum entre u e v. Assim, (M, d) é um espaço métrico.

Para $k \geq 0$, conjunto $Y^k = \{v \in M \mid |v| = k\}$, é denominado *$k$-ésimo nível* de $\mathcal{T}_Y$.

4.1. **O Grupo de Automorfismos de Árvores Regulares.** Dados duas árvores $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$, uma aplicação $\alpha : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R}$ é um *isomorfismo* se ela é bijetora e preserva a adjacência dos vértices; isto é, se para quaisquer dois vértices adjacentes $v,\ vy \in M$ os vértices $(v)\alpha$ e $(vy)\alpha$ são também adjacentes.

Para cada $u \in M$, considere a subárvore $u\mathcal{T}_Y = \{u.v \mid v \in M\}$ de $\mathcal{T}_Y$ que possui u como raiz. Agora note que $u.v \mapsto v$ é um isomorfismo de $u\mathcal{T}_Y$ em $\mathcal{T}_Y$.

Uma aplicação $\alpha : \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_Y$ é um *endomorfismo da árvore* $\mathcal{T}_Y$ se ela preserva a adjacência dos vértices.

Definição 4.1. *Um automorfismo de uma árvore regular $\mathcal{T}_Y$ é um endomorfismo bijetor de $\mathcal{T}_Y$.*

Equivalentemente, podemos dizer que um automorfismo de uma árvore regular $\mathcal{T}_Y$ é uma bijeção sobre M que preserva a função distância d. Um automorfismo de uma árvore regular $\mathcal{T}_Y$ é também denominado uma *isometria* de $\mathcal{T}_Y$.

O conjunto dos automorfismos de $\mathcal{T}_Y$ forma um grupo que denotaremos por $\mathcal{A} = Aut(\mathcal{T}_Y)$ e chamaremos *grupo dos automorfismos de $\mathcal{T}_Y$* ou *grupo de isometrias de $\mathcal{T}_Y$*.

Dada uma permutação $\sigma \in \mathcal{P}(Y)$, o grupo das permutações de Y, podemos estendê-la a um automorfismo de $\mathcal{T}_Y$ da seguinte forma:

$$(y.u)\sigma = (y)\sigma.u,\ \forall y \in Y,\ \forall\ u \in M.$$

Por outro lado, um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}$ induz uma permutação $\sigma_\phi(\alpha)$ sobre o conjunto Y. Assim, podemos escrever $\alpha = \alpha'.\sigma_\phi(\alpha)$, onde α' estabiliza Y ponto a ponto. Para cada $y \in Y$, α' induz sobre a subárvore $y.\mathcal{T}_Y$ um automorfismo α'_y. Considerando o isomorfismo $y.\mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_Y$ podemos identificar $y.\mathcal{T}_Y$ com $\mathcal{T}_Y$ e assim identificar α'_y como um elemento de $\mathcal{A}$. Desta forma, podemos considerar α' como uma função de Y em $\mathcal{A}$ e assim temos que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^Y \rtimes \mathcal{P}(Y),$$

onde $A^Y = F(Y, \mathcal{A})$ é o grupo das funções de Y em $\mathcal{A}$. Isto significa que podemos ver o grupo de automorfismos de árvores como um produto entrelaçado: $\mathcal{A} = \mathcal{A}Wr_Y\mathcal{P}(Y)$. Denotamos α'_y por α_y e escrevemos $\alpha = (\alpha_y)_{y\in Y}.\sigma_\phi(\alpha)$. A ação de α em $\mathcal{T}_Y$ é dada por:

$$(yu)\alpha = (y)\sigma_\phi(\alpha).(u)\alpha_y,\ \forall\ y \in Y,\ \forall\ u \in M.$$

Podemos repetir para α_y o mesmo processo de descrição visto para α, assim $\alpha_y = (\alpha_{yx})_{x\in Y}.\sigma_\phi(\alpha_y)$ e podemos repetir novamente o processo para cada α_{yx}. Sucessivos desenvolvimentos de α produzem, para cada $u \in M$, um automorfismo $\alpha_u = (\alpha_{ui})_{i\in Y}.\sigma_\phi(\alpha_u)$. Vamos denotar $\sigma_\phi(\alpha_u)$ por $\sigma_u(\alpha)$ e α por α_ϕ. Podemos então considerar os conjuntos $\Sigma(\alpha) = \{\sigma_u(\alpha) \mid u \in M\}$ e $Q(\alpha) = \{\alpha_u \mid u \in M\}$. O conjunto $Q(\alpha)$ é denominado *conjunto de estados* de α. Um estado α_u de α é dito ser **ativo** se $\sigma_u(\alpha) \neq e$, caso contrário, ele é denominado **inativo**.

Seja $\alpha \in \mathcal{A}$. Escrevemos $\alpha = \alpha^{(0)}$ e denotamos por $\alpha^{(1)}$ o automorfismo de $\mathcal{T}_Y$ onde $(\alpha^{(1)})_y = \alpha$, $\forall\, y \in Y$, e $\sigma_\phi(\alpha^{(1)}) = e$. Indutivamente, para $k > 1$, denotamos por $\alpha^{(k)}$ o automorfismo de $\mathcal{T}_Y$ onde $(\alpha^{(k)})_y = \alpha^{(k-1)}$, $\forall\, y \in Y$, e $\sigma_\phi(\alpha^{(k)}) = e$. Por exemplo, se $Y = \{1, 2, \cdots, n\}$, temos $\alpha^{(1)} = (\alpha, \cdots, \alpha)$ e $\alpha^{(k)} = (\alpha^{(k-1)}, \cdots, \alpha^{(k-1)})$, $\forall\, k \geq 1$, onde os vetores possuem n coordenadas.

Definição 4.2. *Seja $G \leq Aut(\mathcal{T}_Y)$.*
(i) O estabilizador em G de um vértice $v \in \mathcal{T}_Y$, é o subgrupo

$$G_v = \{\alpha \in G \mid (v)\alpha = v\}.$$

(ii) O estabilizador do k-ésimo nível é o subgrupo $St_G(k) = \bigcap_{v\in Y^k} G_v$.
(iii) G é nível-transitivo se ele age transitivamente em todos os níveis da árvore $\mathcal{T}_n$.

Observação 4.3.
(i) Seja $G \leq Aut(\mathcal{T}_Y)$, então $\forall\, k \geq 1$, $St_G(k)$ é um subgrupo normal de índice finito em G; $\bigcap_{k\geq 1} St_G(k) = \{e\}$ e $St_G(k+1) \leq St_G(k)$.
(ii) O grupo de automorfismo $Aut(\mathcal{T}_n)$ é um grupo profinito. Se $\mathcal{T}_{n,j}$ denota a árvore n-ária truncada no nível j, então

$$Aut(\mathcal{T}_n) = \varprojlim Aut(\mathcal{T}_{n,j}).$$

Notamos que $\mathcal{T}_{n,j}$ é finita, $\forall\, j \geq 0$ e portanto $Aut(\mathcal{T}_{n,j})$ é também finito, $\forall\, j \geq 0$. Quando $|Y| = 2$, temos que $Aut(\mathcal{T}_{2,j}) = W_{j-1} wr C_2$, onde W_{j-1} é o produto entrelaçado iterado $j-1$ vezes de C_2, o grupo cíclico de ordem 2. Portanto, $Aut(\mathcal{T}_{2,j})$ é um 2-grupo finito e assim, $Aut(\mathcal{T}_2)$ é um grupo pro-2. Mais detalhes podem ser encontrados em [9].

4.2. **Automorfismos com um Número Finito de Estados.** Um automorfismo de $\mathcal{T}_Y$ pode ser interpretado como um *autômato de Mealy* que é uma *máquina de Turing* definida por uma sêxtupla $(Q, L, \Gamma, f, l, q_0)$, onde:

- Q é o conjunto de estados;
- L é o alfabeto de entrada:
- Γ é o alfabeto de saída;
- $f : Q \times L \longrightarrow Q$ é a função de transição de estados;
- $l : Q \times L \longrightarrow \Gamma$ é a função de saída;
- q_0 é o estado inicial,

Um autômato é *finito* se o conjunto de estados Q é finito, veja [10] e [4].

Para um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}$, associamos o autômato $A(\alpha)$ dado pela sêxtupla $A(\alpha) = (Q = Q(\alpha), L = Y, \Gamma = Y, f, l, q_0 = \alpha)$, onde as funções $f : Q(\alpha) \times Y \longrightarrow$

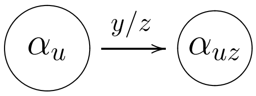

FIGURA 2. Diagrama de Moore

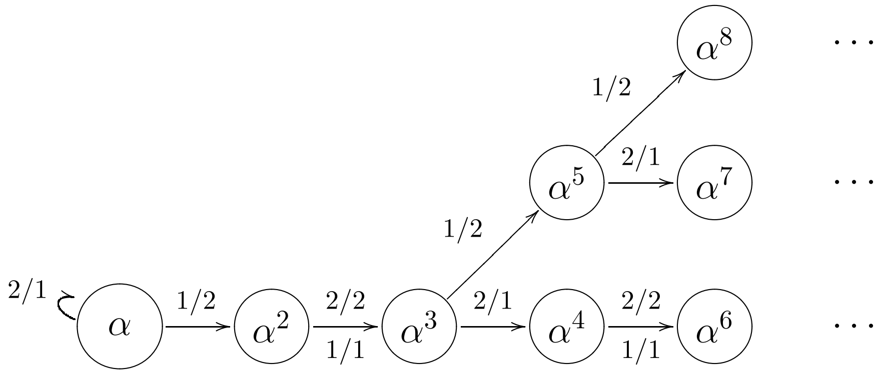

FIGURA 3. Diagrama de Moore de $A(\alpha)$ onde $\alpha = (\alpha, \alpha^2)\sigma$

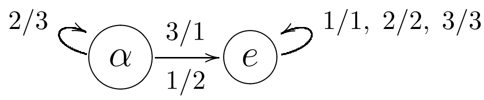

FIGURA 4. Diagrama de Moore de $A(\alpha)$ onde $\alpha = (e, e, \alpha)\sigma$

$Q(\alpha)$ e $l : Q(\alpha) \times Y \longrightarrow Y$ são dadas por $f(\alpha_u, y) = \alpha_{uz}$ e $l(\alpha_u, y) = z$, onde $z = (y)\alpha_u$. $A(\alpha)$ é denominado o *autômato de* α.

É conveniente definir autômatos usando o *diagrama de Moore*. Para o autômato $A(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$ o diagrama de Moore é um grafo orientado, com os vértices identificados com os estados $Q(\alpha)$. Se $z = (y)\alpha_u$, então temos uma aresta iniciando em α_u, finalizando em α_{uz} e rotulada por y/z, onde $u \in M$ e $y,\ z \in Y$. Veja figura 2.

Exemplo 4.4. *Seja* $\alpha = (\alpha, \alpha^2)\sigma \in Aut(\mathcal{T}_2)$ *onde* $\sigma = (1\ 2)$*. Então,* $\alpha^2 = (\alpha^3, \alpha^3)$ *e*

$$\alpha^{2k} = (\alpha^{3k}, \alpha^{3k}), \quad \alpha^{2k+1} = (\alpha^{3k+1}, \alpha^{3k+2})\sigma.$$

Então $Q(\alpha) = \{\alpha^k \mid k \geq 1\}$ *é um conjunto infinito e seu autômato é portanto infinito. O diagrama de Moore de* $A(\alpha)$ *é dado na figura 3.*

Exemplo 4.5. *Seja* $\alpha = (e, e, \alpha)\sigma \in Aut(\mathcal{T}_3)$ *onde* $\sigma = (1\ 2\ 3)$*. Então* $Q(\alpha) = \{e, \alpha\}$ *e seu autômato é portanto finito. O diagrama de Moore de* $A(\alpha)$ *é dado na figura 4.*

Definição 4.6. *O automorfismo* $\alpha \in Aut(\mathcal{T}_Y)$ *é denominado um automorfismo com um número finito de estados se* Y *e* $Q(\alpha)$*são conjuntos finitos.*

Assim, $\alpha \in Aut(\mathcal{T}_Y)$ é um automorfismo com um número finito de estados se, e somente se o autômato $A(\alpha)$ é finito. Para quaisquer automorfismos α e β em $Aut(\mathcal{T}_Y)$ temos que $Q(\alpha^{-1}) = Q(\alpha)^{-1}$ e $Q(\alpha\beta) \subseteq Q(\alpha)Q(\beta)$. Ainda, os autômatos com um número finito de estados formam um conjunto enumerável. Seja $\mathcal{F}_Y$ o conjunto dos automorfismos com um número finito de estados. Então temos a seguinte proposição.

Proposição 4.7. *O conjunto* $\mathcal{F}_Y$ *é um subgrupo enumerável de* $Aut(\mathcal{T}_Y)$*.*

Exemplo 4.8. *Um exemplo de grupo gerado por automorfismos de finitos estados pode ser obtido como segue: para um primo p ímpar consideramos σ_p a extensão da permutação $(1, 2, \cdots, p)$ a um automorfismo de $\mathcal{T}_p$. A ação de σ_p em $\mathcal{T}_p$ é a de permutar ciclicamente o primeiro nível. Agora, consideremos $\gamma = (\sigma_p, \sigma_p^{-1}, e, \cdots, e, \gamma) \in Aut(\mathcal{T}_p)$. O grupo $\mathcal{G} = \langle \gamma, \sigma_p \rangle$ é conhecido como* p**-grupo de Gupta-Sidki**. *Este grupo é um p-grupo infinito, possui expoente infinito além de outras propriedades. Se $p = 3$, temos que $\gamma = (\sigma_3, \sigma_3^{-1}, \gamma)$ e $Q(\gamma) = \{e, \sigma_3, \sigma_3^{-1}, \gamma\}$.*

Referências

[1] KALOUJNINE, A., *Sur Les p-groupes de Sylow du groupe symétrique de degré p^n, C. R. Acad. Sci.* Paris, 224 (1947) 253-255.

[2] LOPES, G. L. O., *O produto wreath em classes de grupos.* Dissertação(Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, 2000.

[3] MELDRUM, J. D. P., *Wreath Products of Groups and Semigroups*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., v. 74, 1995.

[4] NEKRASHEVYCH, V., *Self-similar groups. Math. Surveys Monogr.*, 117, 2005.

[5] ROBINSON, D. J. S., *A course in the teory of groups.* Second edition. Springer-Verlag, New York, 1996.

[6] ROTMAN, J. J., *An introduction to the teory of groups.* Fourth edition. Springer-Verlag, New York, 1994.

[7] SIDKI, S. N., Regular trees and their automorphisms, *Monografias em Matemática*, 56, IMPA, Rio de janeiro, 1998.

[8] RIBEIRO, M. R. R., *O grupo finitário de isometrias da árvore n-ária.* Tese(Doutorado em Matemática)- Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

[9] BASS, H.; OTERO-ESPINAR, M. V.; ROCKMORE, D.; TRESSER, C., *Cyclic renormalization and automorphism groups of rooted trees*, Lecture Notes in Mathematics, v. 1621, Springer-Verlag, Berlim, 1996.

[10] EILENBERG, S., *Automata, languages and machines*, v. A, New york, Academic Press, 1974.

Márcio Roberto Rocha Ribeiro
UFG - Campus de Catalão - Departamento de Matemática
email:marcioroberto@unb.br